Recíprocamente, de una fórmula se pueden eliminar paréntesis siempre y cuando se puedan restaurar. Por ejemplo, de la fórmula

$$(B \to (\neg(\neg A)))$$

se pueden eliminar todos los paréntesis:

$$B \to \neg\neg A$$

pues estos se pueden restaurar a la fórmula original. Pero de la fórmula

$$((P \to Q) \to R)$$

no se pueden eliminar todos los paréntesis, pues si lo hacemos queda

$$P \to Q \to R$$

que de acuerdo a nuestras convenciones se restaura a

$$(P \to (Q \to R))$$

que no es la fórmula original.

Tarea

Eliminar tantos paréntesis como sea posible:

1. $((B \rightarrow (\neg A)) \wedge C)$
2. $((A \vee B) \vee C)$
3. $(((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \vee D)$
4. $((B \vee (\neg C)) \vee (A \wedge B))$
5. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(C \vee D)))$
6. $((\neg(\neg(\neg(B \vee C)))) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
7. $(\neg((\neg(\neg(B \vee C))) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)))$
8. $((((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)) \wedge (\neg A)) \vee C)$

Tarea

Restaurar paréntesis.

1. $C \vee \neg A \wedge B$
2. $B \rightarrow \neg\neg\neg A \wedge C$
3. $C \rightarrow \neg(A \wedge B \rightarrow C) \wedge A \leftrightarrow B$
4. $C \rightarrow A \rightarrow A \leftrightarrow \neg A \vee B$

Tarea

Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas de PL, y de las que lo sean, restaurar sus paréntesis.

1. $\neg\neg A \leftrightarrow A \leftrightarrow B \vee C$
2. $\neg(\neg A \leftrightarrow A) \leftrightarrow B \vee C$
3. $\neg(A \rightarrow B) \vee C \vee D \rightarrow B$
4. $A \leftrightarrow (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge (B \vee C)))$
5. $\neg A \vee B \vee C \wedge D \leftrightarrow A \wedge \neg A$
6. $((A \rightarrow B \wedge (C \vee D) \wedge (A \vee D))$

Tarea

Si escribimos $\neg\mathcal{F}$ *en lugar de* $(\neg\mathcal{F})$, $\rightarrow\mathcal{F}\mathcal{G}$ *en lugar de* $(\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G})$, $\wedge\mathcal{F}\mathcal{G}$ *en lugar de* $(F\wedge\mathcal{G})$ *y* $\vee\mathcal{F}\mathcal{G}$ *en lugar de* $(\mathcal{F}\vee G)$, *entonces no hay necesidad de paréntesis. Por ejemplo,* $((\neg A)\wedge(B\rightarrow(\neg D)))$, *la cual ordinariamente se abrevia como* $\neg A\wedge(B\rightarrow\neg D)$, *se convierte en* $\wedge\neg A\rightarrow B\neg D$. *Esta forma de escritura se llama* **notación polaca**.

1. *Escribir* $((C\rightarrow(\neg A))\vee B$ *y* $(C\vee((B\wedge(\neg D))\rightarrow C))$ *en notación polaca.*
2. *Escribir las fórmulas de la primera tarea en notación polaca.*

Semántica

La semántica de la Lógica le provee significado: **true**, **false**, donde **true**$\neq$**false**.

Definición

Una **interpretación** *(***asignación, modelo***) I es una asignación de cada letra proposicional de un único valor de verdad.*

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} I: \quad P &\mapsto \textbf{true} \\ Q &\mapsto \textbf{false} \\ &\vdots \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} I: \quad P &\mapsto 1 \\ Q &\mapsto 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dada una interpretación I y una fórmula $\mathcal{F}$ de PL se puede calcular el valor de verdad de $\mathcal{F}$. La forma más popular es mediante tablas:

$\mathcal{F}$	$\neg\mathcal{F}$
0	1
1	0

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Ejemplo

Sea $\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$ con interpretación

$$I : \{P \mapsto \textbf{true}, Q \mapsto \textbf{false}\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es verdadera, pues

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$	$\mathcal{F}$
1	0	1	0	1	1

Una definición más precisa se obtiene haciendo la propia definición de forma *inductiva*.

Definición

Sea $\mathcal{F}$ una fórmula, I una interpretación. Se pone

1. $I \models \mathcal{F}$ *ssi* $\mathcal{F}$ *se valua a* **true** *bajo* I.
2. $I \not\models \mathcal{F}$ *ssi* $\mathcal{F}$ *se valua a* **false** *bajo* I.

El símbolo $\models$ se lee *valida*, *modela*.

Definición

1. *Para cualquier interpretación I se cumplen:*

$$I \models \top, \quad I \not\models \bot$$

2. *Si P es letra proposicional y I interpretación,*

$$I \models P \textit{ ssi } I[P] = \textbf{true}$$

esto es, $I \models P$ ssi I le asigna a P el valor **true**. *O equivalentemente*

$$I \not\models P \textit{ ssi } I[P] = \textbf{false}$$

3. Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son fórmulas, I interpretación,
    3.1 $I \models \neg\mathcal{F}$ ssi $I \not\models \mathcal{F}$
    3.2 $I \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ ssi $I \models \mathcal{F}_1$ y $I \models \mathcal{F}_2$
    3.3 $I \models \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ssi $I \models \mathcal{F}_1$ ó $I \models \mathcal{F}_2$
    3.4 $I \models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ ssi (si $I \models \mathcal{F}_1$ entonces $I \models \mathcal{F}_2$)
    3.5 $I \models \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ ssi ($I \models \mathcal{F}_2$ y $I \models \mathcal{F}_2$) ó ($I \not\models \mathcal{F}_1$ y $I \not\models \mathcal{F}_2$)

Nótese que $I \not\models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ ssi ($I \models \mathcal{F}_1$ entonces $I \models \mathcal{F}_2$) es falso lo cual ocurre sólo si $I \models \mathcal{F}_1$ es verdadero y $I \models \mathcal{F}_2$ es falso. Esto es

$$I \not\models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \text{ ssi } I \models \mathcal{F}_1 \text{ y } I \not\models \mathcal{F}_2.$$

Para calcular valores de verdad se hace siguiendo el orden para subfórmulas; de fórmulas menos complejas a las más. Esto es, $\mathcal{F}_1$ precede a $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1$ es subfórmula de $\mathcal{F}_2$.

Ejemplo

Sean $\mathcal{F} : P \wedge Q \rightarrow P \vee \neg Q$, $I : \{P \mapsto \textbf{true}, Q \mapsto \textbf{false}\}$, entonces,

1. $I \models P$ pues $I[P] = \textbf{true}$
2. $I \not\models Q$, pues $I[Q] = \textbf{false}$
3. $I \models \neg Q$, semántica de $\neg$
4. $I \not\models P \wedge Q$ por (2) y semántica de $\wedge$
5. $I \models P \vee \neg Q$ por (1) y semántica de $\vee$
6. $I \models \mathcal{F}$, por (4) y semántica de $\rightarrow$

Definición

1. *Una fórmula $\mathcal{F}$ es* **satisfactible** *si existe una interpretación I tal que*
$$I \models \mathcal{F}.$$
2. *Una fórmula $\mathcal{F}$ es* **válida** *(***tautología***) si para toda interpretación I se cumple*
$$I \models \mathcal{F}.$$
3. *Una fórmula se dice* **insatisfactible** *si no es satisfactible.*

Hay cierta relación entre satisfactibilidad y validez: $\neg\mathcal{F}$ es insatisfactible si para toda interpretación I se cumple $I \not\models \neg\mathcal{F}$ lo cual ocurre ssi para toda interpretación I, $I \models \mathcal{F}$ ssi $\mathcal{F}$ es válida. En resumen:

$$\neg\mathcal{F} \text{ es insatisfactible ssi } \mathcal{F} \text{ es válida.}$$

Hay varias formas de determinar validez y satisfactibilidad:

1. Tablas de verdad.
2. Argumentos semánticos.

(pero éstas no son las únicas).

Tablas de verdad

Ejemplo

Sea $\mathcal{F} : P \wedge Q \rightarrow P \wedge \neg Q$ ¿Es $\mathcal{F}$ válida?

Sol. Construimos la tabla de verdad.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$\mathcal{F}$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Cada renglón representa una posible interpretación. De hecho, para toda interpretación I, $I \models \mathcal{F}$, así $\mathcal{F}$ es válida.

Ejemplo

Sea $\mathcal{F} : P \vee Q \to P \wedge Q$. ¿Es $\mathcal{F}$ satisfactible?

Sol. La tabla de verdad:

	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\mathcal{F}$
I_1:	0	0	0	0	1
I_2:	0	1	0	1	0
I_3:	1	0	0	1	0
I_4:	1	1	1	1	1

Podemos observar que hay interpretaciones que validan a la fórmula. Por ejemplo, $I_4 : \{P \mapsto \textbf{true}, Q \mapsto \textbf{true}\}$ cumple

$$I_4 \models \mathcal{F}$$

por tanto $\mathcal{F}$ es satisfactible (por cierto $\mathcal{F}$ no es válida).