Lógica de Primer Orden

Lógica de primer orden (First Order Logic)(FOL) se refiere a lógica de proposiciones junto con cuantificadores.
En FOL se hacen uso de los siguientes símbolos:

1. $x, y, z, x_1, x_2, \ldots,$ se llaman **variables.**
2. $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ se llaman **constantes.**
3. $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ se llaman **funciones.**

Un símbolo función con n argumentos se llama función n-aria. Las constantes se consideran funciones 0-arias.

Además de estos símbolos se usan los llamados *términos*. La definición de término se hace usando *inducción estructural*.

Definición

Los siguientes son **términos***:*

- *las constantes*
- *las variables*
- *funciones aplicadas a términos*

Ejemplo

Los siguientes son ejemplos de términos:

- a constante
- x variable
- $f(a)$, $g(x, b)$, $f(g(f(x), f(b)))$; donde f es función 1-aria y g es función 2-aria.

Las letras proposicionales de PL se generalizan a **predicados** que se denotan $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$

Definición

- *Un* **predicado** n-**ario** *toma n términos como argumento.*
- *Una* **variable proposicional** *es un predicado 0-ario (sin argumentos) y se denota como $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$*
- *Una* **átomo** *es $\top, \bot$ o un predicado n-ario aplicado a n términos.*
- *Una* **literal** *es un átomo o su negación.*

Ejemplo

Las siguientes son literales:

- P una variable proposicional, predicado 0-ario, átomo.
- $p(f(x), g(x, f(x)))$ es un predicado 2-ario aplicado a dos términos, átomo.
- $\neg p(f(x), g(x, f(x)))$ negación de átomo.

Las fórmulas que se estudian en FOL se definen de manera recursiva:

Definición

Una **fórmula** *en FOL es una literal, la aplicación de los conectivos lógicos* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ *a fórmulas o la aplicación de un* **cuantificador** *a una fórmula. Donde los cuantificadores son:*

1. *Existencial:* $\exists x.\, \mathcal{F}[x]$
2. *Universal:* $\forall x.\, \mathcal{F}[x]$

En la expresión

$$\forall x.\, \mathcal{F}[x]$$

x se llama la **variable cuantificada** y $F[x]$ el **campo, influencia, alcance** (scope) del cuantificador. Similarmente para $\exists x.\, \mathcal{F}[x]$. En ambos casos decimos que x en está **acotada** por el cuantificador. El punto "." en "$.\, \mathcal{F}[x]$" indica que el campo de la variable cuantificada se extiende tanto como sea posible.

Definición

$\forall x.\, \forall y.\, \mathcal{F}[x, y]$ se abrevia como $\forall x, y.\, \mathcal{F}[x, y]$.

Ejemplo

En

$$\forall x.\ \underbrace{p(f(x), x) \rightarrow (\exists y.\ \overbrace{p(f(g(x, y), g(x, y)))}^{\text{campo de } y}) \wedge q(x, f(x))}_{\text{influencia de } x}$$

Definición

Una variable x es **libre** *en la fórmula si aparece como no acotada por ningún cuantificador. El conjunto de variables libres de una fórmula $\mathcal{F}$ s denota como:*

$$\text{free}(\mathcal{F}).$$

Una variable x se dice **acotada** *en la fórmula $\mathcal{F}[x]$ si aparece x en la influencia de un cuantificador $\forall x$ ó $\exists x$. El conjunto de variables acotadas de una fórmula $\mathcal{F}$ es*

$$\text{bound}(\mathcal{F}).$$

Es posible que $\mathrm{free}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{bound}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$ como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : \forall x.\, p(f(x), y) \to \forall y.\, p(f(x), y)$$

entonces

- x aparece sólo acotada;
- y aparece libre en el antecedente, y aparece acotada en el consecuente;

$$\mathrm{free}(\mathcal{F}) = \{y\}, \quad \mathrm{bound}(\mathcal{F}) = \{x, y\}$$