

Secuentes y formas normales

Se pueden utilizar secuentes para calcular formas normales disyuntivas y conjuntivas.

Definición

1. Una **literal** es una letra proposicional o la negación de una letra proposicional.
2. Una fórmula de la lógica proposicional C está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es la conjunción de disyuntivas de literales.
3. La **forma normal disyuntiva (FND)** es la dual de la forma normal conjuntiva, es decir, es la disyunción de conjuntivas de literales.

Corolario

Si \mathcal{C} es una fórmula, entonces existe \mathcal{C}' una forma normal conjuntiva tal que \mathcal{C}' es lógicamente equivalente a \mathcal{C} .

En lugar de dar la demostración de este corolario ejemplificaremos el procedimiento del cálculo de tal forma normal.

Ejemplo

Encontrar la forma normal conjuntiva de

$$(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$$

Sol. Consideramos la fórmula en el secuento

$\rightarrow (\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$ y calculamos su árbol de deducciones:

$$\frac{\frac{\frac{P \rightarrow R, S}{\neg R, P \rightarrow S}}{P \rightarrow \neg R \supset S}}{\rightarrow \neg P, \neg R \supset S} \quad \frac{\frac{Q \rightarrow S, R}{\neg R, Q \rightarrow S}}{Q \rightarrow \neg R \supset S}}{\frac{(\neg P \supset Q) \rightarrow (\neg R \supset S)}{\rightarrow (\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)}}$$

Obtenemos un árbol de contradicción. Observamos las hojas para formar:

$$(\neg P \vee R \vee S) \wedge (\neg Q \vee S \vee R)$$

que es la forma normal conjuntiva buscada.

Para calcular la forma normal disyuntiva del ejemplo anterior se procede de forma dual.

Ejemplo

Calculamos el árbol de deducción del secuento

$$(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S) \rightarrow$$

que es:

$$\frac{\frac{\frac{\rightarrow P, Q}{\neg P \rightarrow Q}}{\rightarrow \neg P \supset Q} \quad \frac{\frac{R \rightarrow}{\rightarrow \neg R} \quad S \rightarrow}{\neg R \supset S \rightarrow}}{(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S) \rightarrow}$$

de donde la forma normal disyuntiva de $(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$ es

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R \vee S$$

En el ejemplo anterior nótese que

$$\frac{\frac{\frac{\rightarrow P, Q}{\neg P, \neg Q \rightarrow}}{\neg P \wedge \neg Q \rightarrow} \quad R \rightarrow \quad S \rightarrow}{(\neg P \wedge \neg Q) \vee R \vee S \rightarrow}$$

de donde $I \models (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \vee S$ si y sólo si
 $I \models (\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$

Tarea

Usando árboles de deducción, calcule las formas normales conjuntivas y disyuntivas de las siguientes fórmulas.

1. $(A \supset C) \supset ((B \supset D) \supset ((A \vee B) \supset C))$
2. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg C) \supset \neg A)$