Lema

Cada axioma de G' es válido.

Proof.

Sea $\Gamma \to \Delta$ un axioma, entonces

$$\Gamma = \{\ldots, \mathcal{C}_i, \mathcal{B}, \mathcal{C}_{i+1}, \ldots\}, \quad \Delta = \{\ldots, \mathcal{D}_j, \mathcal{B}, \mathcal{D}_{j+1}, \ldots\}.$$

Tenemos que probar que $\Gamma \to \Delta$ es válido. Supongamos lo contrario, es decir, que, según propiedad anterior, $\Gamma \to \Delta$ es falsificable. Luego existe I interpretación tal que

$$I \models (\ldots \wedge \mathcal{C}_i \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}_{i+1} \wedge \ldots) \wedge (\ldots \wedge \neg\mathcal{D}_j \wedge \neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{D}_{j+1} \wedge \ldots)$$

lo que implica que

$$I \models \mathcal{B} \text{ y } I \models \neg\mathcal{B}.$$

lo cual es contradictorio. Por lo tanto $\Gamma \to \Delta$ no es falsificable y así, según propiedad anterior se obtiene que $\Gamma \to \Delta$ es válida. $\square$

Teorema (Validez)

Si $\vdash_{G'} \Gamma \rightarrow \Delta$ *entonces* $\models_{G'} \Gamma \rightarrow \Delta$.

Proof.

Si $\vdash_{G'} \Gamma \rightarrow \Delta$ entonces $\Gamma \rightarrow \Delta$ es raíz de un árbol de prueba cuyas hojas son axiomas; luego, como los axiomas son válidos según lema anterior, luego los consecuentes de tales son válidos, según lema anterior y por tanto la raíz $\Gamma \rightarrow \Delta$ es válida. $\square$

Después se demostrará el recíproco de éste teorema (completez), es decir, que sólo los secuentes válidos son demostrables. Resulta que en G' se puede averiguar, del árbol de deducciones, si un secuente es válido (demostrable) o no: en el primer caso se obtiene una prueba, en el segundo se obtienen los contraejemplos.

Ejemplo

Averiguar si el secuente es demostrable:

$$P \wedge \neg Q, P \supset Q, T \supset R, P \wedge R \rightarrow T$$

Sol.

Calculamos el árbol de deducciones:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P, Q, T \supset R, P \wedge R \rightarrow T, Q}^{\text{axioma: hoja terminada}} \qquad \dfrac{\dfrac{P, P, P, R \rightarrow T, T, Q}{P, P, P \wedge R \rightarrow T, T, Q}\ \wedge : \text{izq.} \qquad \dfrac{R, P, P, P, R \rightarrow T, Q}{R, P, P, P \wedge R \rightarrow T, Q}\ \wedge : \text{izq.}}{P, P, T \supset R, P \wedge R \rightarrow T, Q}\ \supset : \text{izq.}}{P, P \supset Q, T \supset R, P \wedge R \rightarrow T, Q}\ \supset : \text{izq.}}{P, \neg Q, P \supset Q, T \supset R, P \wedge R \rightarrow T}\ \neg : \text{izq.}}{P \wedge \neg Q, P \supset Q, T \supset R, P \wedge R \rightarrow T}\ \wedge : \text{izq.}$$

Este árbol indica que el secuente no es demostrable, pues si P, R son **true** y T, Q son **false** entonces el secuente es falso. $\square$

Los árboles de deducción del tipo del ejemplo anterior se llaman *árboles de contraejemplo*. Sólo hay dos tipos de árboles: de prueba o de contradicción.

Definición

Una hoja se llama **terminada** *si está etiquetada por un axioma o por un secuente* $\Gamma \to \Delta$ *donde* Γ *y* Δ *consisten de letras proposicionales no comunes.*

Propiedad

Sea $\mathfrak{S} : P_1, \ldots, P_n \to Q_1, \ldots, Q_n$ un secuente formado sólo por letras proposionales $P_1, \ldots, P_n, Q_1 \ldots, Q_m$. Entonces $\mathfrak{S}$ es válido si y sólo si es un axioma.

Dem. Por lema anterior sabemos que si $\mathfrak{S}$ es axioma entonces $\models \mathfrak{S}$. Recíprocamente, supongamos que $\models \mathfrak{S}$ entonces, por definición para toda I interpretación se cumple

$$I \models (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \supset (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m) \tag{1}$$

Si $\{P_1, \ldots, P_n\} \cap \{Q_1, \ldots, Q_m\} = \varnothing$ entonces podemos considerar la interpretación

$$I : \{P_1 \mapsto \textbf{true}, \ldots, P_n \mapsto \textbf{true}, Q_1 \mapsto \textbf{false}, \ldots, Q_m \mapsto \textbf{false}\}$$

que cumple

$$I \not\models (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \supset (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)$$

lo que contradice (1). Por tanto $\{P_1, \ldots, P_n\} \cap \{Q_1, \ldots, Q_m\} \neq \varnothing$ lo que implica que $\mathfrak{S}$ es un axioma.

Corolario (Completez)

Si $\Delta \to \Delta$ *es válido entonces es demostrable, es decir: si* $\models \Gamma \to \Delta$ *entonces* $\vdash \Gamma \to \Delta$.

Dem. Si $\mathcal{C}$ es una fórmula de la lógica proposicional se define su *complejidad* como el número de conectivos que tiene: $\Theta(\mathcal{C})$. Si

$$\mathfrak{S} : \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$$

es un secuente, se define su complejidad como

$$\Theta(\mathfrak{S}) = \Theta(\mathcal{B}_1) + \cdots + \Theta(\mathcal{B}_m) + \Theta(\mathcal{C}_1) + \cdots + \Theta(\mathcal{C}_n).$$

Nótese que la aplicación de reglas de inferencia aumenta la complejidad de secuentes (de arriba hacia abajo):

$$\frac{\mathfrak{S}_1 \qquad \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3} \qquad \Theta(\mathfrak{S}_3) > \Theta(\mathfrak{S}_1), \Theta(\mathfrak{S}_2)$$

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} \qquad \Theta(\mathfrak{S}_2) > \Theta(\mathfrak{S}_1)$$

Luego, si tenemos un secuente $\mathfrak{S} : \Gamma \to \Delta$ válido, le aplicamos los procedimientos anteriores para buscar su prueba (árbol de deducciones) entonces, su complejidad va dismuniyendo (de abajo hacia arriba). El procedimiento va a terminar en cada rama cuando tengamos complejidad cero que corresponde a secuentes formados por sólo por letras proposicionales (no conectivos). Luego tenemos un árbol de prueba con hojas formadas por secuentes con sólo letras proposicionales. Como comenzamos con $\mathfrak{S}$ válido y las reglas de inferencia conservan validez (y falsificación) las hojas tienen que ser válidas, luego estas hojas son axiomas y el árbol de deducciones es un árbol de prueba.