Lema

En cada regla de inferencia de G', una interpretación I falsifica al secuente que aparece en la conclusión si y sólo si I falsifica a algún secuente de las premisas.

Dem. Tenemos que checar regla por regla. Por ejemplo en ($\supset$: izq):

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda \quad \Gamma, \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\supset\text{: izquierda})$$

Sea I una interpretación tal que falsifica al secuente de la conclusión:

$$\underbrace{\Gamma}_{\{\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n\}}, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \underbrace{\Delta}_{\{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_m\}} \to \underbrace{\Lambda}_{\{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_s\}}$$

ssi, por definición,

$$I \models \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \wedge (\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \wedge \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$$

ssi

$$I \models \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \tag{1}$$
$$I \models \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \tag{2}$$
$$I \models \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s \tag{3}$$
$$I \models \mathcal{B} \supset \mathcal{C} \tag{4}$$

luego de (4) se tienen dos casos:

1. $I \not\models \mathcal{B}$
2. $I \models \mathcal{C}$

1. Si $I \not\models \mathcal{B}$ entonces, de (1),(2),(3) se sigue que

   $$I \models \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \wedge \neg\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$$

   es decir I hace falsificable a $\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda$.
2. Si $I \models \mathcal{C}$ entonces,

   $$I \models \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \wedge \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$$

   es decir, I hace falsificable a $\mathcal{C}, \Gamma, \Delta \to \Lambda$.

Los casos restantes son similares.

Definición

1. *Un* **árbol de prueba** *es un árbol cuyas hojas son axiomas.*
2. *Si se tiene un árbol de prueba, la etiqueta de la raíz se llama* **conclusión**.
3. *Un secuente* $\Gamma \rightarrow \Delta$ *se dice* **demostrable** *si existe un árbol de prueba del cual es conclusión: en tal caso se pone* $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$.

Ejemplo

Muestre que el secuente

$$\rightarrow (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

es demostrable.

Sol.

$$\vdash \rightarrow (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P, \neg Q \rightarrow P}{\neg Q \rightarrow P, \neg P}\ \neg\text{:der.}}{\rightarrow P, \neg Q \supset \neg P}\ \supset\text{:der.} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \rightarrow Q, \neg P}{\neg Q, Q \rightarrow \neg P}\ \neg\text{:izq.}}{Q \rightarrow \neg Q \supset \neg P}\ \supset\text{:der.}}{P \supset Q \rightarrow \neg Q \supset \neg P}\ \supset\text{:izq.}}{\rightarrow (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)}\ \supset\text{:der.}$$

$\square$

Definición

Un árbol de deducción tal que alguna hoja está etiquetada con el secuente $\Gamma \to \Delta$ *donde* Γ *y* Δ *consisten de letras proposicionales no comunes se llama* **árbol de contraejemplo**.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{P \to Q}{\to P \supset Q}\supset:\ \text{der.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{Q \to P}{\neg P, Q \to}\neg:\ \text{izq.}}{\neg P \to \neg Q}\neg:\ \text{der.}}{\to \neg P \supset \neg Q}\supset:\ \text{der.}}{\to (P \supset Q) \wedge (\neg P \supset \neg Q)}\wedge:\ \text{der.}$$

es un árbol de contraejemplo. Esto significa que cuando (P es **true** y Q es **false**) ó (Q es **true** y P es **false**) se obtiene que $(P \supset Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$ es **false**.