Cada regla de inferencia puede ser representada como una árbol: dos nodos: si hay sólo una premisa ($\wedge$ izquierda, $\vee$ derecha, $\supset$ derecha, $\neg$ izquierda y derecha):

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] s_1 \arrow[d] \\ s_2 \end{tikzcd}$$

tres nodos: si hay dos premisas ($\wedge$ derecha, $\vee$ izquierda, $\supset$ izquierda):

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] s_1 \arrow[dr] & & s_2 \arrow[dl] \\ & s_3 & \end{tikzcd}$$

Ejemplo

$$\vdash_{G'} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}$$

Proof.

$$\frac{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}}{\rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}} \qquad \begin{array}{l} \text{axioma} \\ \supset\text{: der.} \end{array}$$

$\square$

Ejemplo

$$\vdash_{G'} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B} \supset \mathcal{B}$$

Proof.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}}{\rightarrow \neg\mathcal{B}, \mathcal{B}}}{\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}}}{\rightarrow \neg\neg\mathcal{B} \supset \mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$	axioma
$\rightarrow \neg\mathcal{B}, \mathcal{B}$	$\neg$ derecha
$\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$	$\neg$ izquierda
$\rightarrow \neg\neg\mathcal{B} \supset \mathcal{B}$	$\supset$ derecha

$\square$

Tarea

De árboles de prueba para las siguientes fórmulas válidas:

1. $A \supset (\mathcal{B} \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3. $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
4. $A \supset A \vee B$
5. $B \supset (A \vee B)$
6. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
7. $(A \wedge B) \supset A$
8. $(A \wedge B) \supset B$
9. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
10. $B \supset \neg\neg B$

Definición

Decimos que el secuente $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ *es* **falsificable** *si existe una interpretación* I *tal que*

$$I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge (\neg \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg \mathcal{C}_n),$$

y decimos que el secuente es **válido** *si para toda interpretación* I *se cumple*

$$I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$$

en tal caso se pone

$$\models \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n.$$

Nótese en la definición, que si $m = 0$, el secuente $\rightarrow \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ es falsificable si existe una valuación tal que $I \models \neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$, es decir, si $\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$ es satisfactible, y recíprocamente:

$\rightarrow \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ es falsificable si y sólo si $\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$ es satisfactible.

Propiedad

El secuente $\Gamma \to \Delta$ es válido si y sólo si no es falsificable.

Dem. Sean $\Gamma = \{\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m\}$, $\Delta = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}$.

- Supongamos que $\models \Gamma \to \Delta$. Por demostrar que $\Gamma \to \Delta$ no es falsificable. Supongamos lo contrario: entonces existe I tal que
  1. $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge (\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n)$, por definición de falsificable,
  2. $I \models \mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m$, de (1) y semántica de $\wedge$,
  3. $I \models \neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$, de (1) y semántica de $\wedge$,
  4. $I \models \neg(C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, de (3) y DeMorgan,
  5. $I \not\models C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$, de (4) y semántica de $\neg$
  6. $I \not\models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, de (2), (5) y semántica de $\supset$,
  7. $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, pues $\Gamma \to \Delta$ es válido y definición,
  8. $I \models \bot$, de (6), (7).

$$\therefore \Gamma \to \Delta \text{ no es falsificable.}$$

- Recíprocamente, supongamos que $\Gamma \to \Delta$ no es falsificable. Entonces, por definición, para toda interpretación I ocurre que

  1. $I \not\models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge (\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n)$.
  2. $I \not\models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge \neg(\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, por DeMorgan

  (2a) $I \not\models \mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m$, caso de (2)
  (3a) $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \mathcal{C}_n)$, (2a) y semántica de $\supset$
  (2b) $I \not\models \neg(\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, caso de (2)
  (3b) $I \models \mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$
  (4b) $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \mathcal{C}_n)$, (3b) y semántica de $\supset$

  En cualquier caso ((3a) y (4b)) se obtiene que $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \mathcal{C}_n)$, luego, por definición, $I \models \Gamma \to \Delta$, para cualquier I. Esto es, $\Gamma \to \Delta$ es válido.