Otras teorías L_i

Hay otras teorías que explican la lógica proposicional.
L_1: En la teoría L_1 sólo hay dos conectivos *primitivos*: $\vee, \neg$, sin embargo se usa $\rightarrow$ como una abreviatura: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ es $\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Los siguientes son esquemas de axiomas:

1. $\mathcal{B} \vee \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$
2. $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$
3. $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \vee \mathcal{B}$
4. $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \rightarrow ((\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{D}))$

La regla de inferencia es modus ponens.

Tarea

Pruebe que

1. $\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash_{L_1} \mathcal{D} \vee \mathcal{B} \to \mathcal{D} \vee \mathcal{C}$
2. $\vdash_{L_1} \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
3. $\vdash_{L_1} \mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{B}$
4. $\vdash_{L_1} \neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}$

L_2**:** Los conectivos primitivos son $\wedge, \neg$, $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es una abreviatura para $\neg(\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C})$. Los axiomas son

1. $\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$
2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \to \mathcal{B}$
3. $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \to \neg(\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$

La única regla de inferencia es modus ponens.

Sistema G' de Gentzen

En esta sección en lugar de escribir $\rightarrow$ pondremos $\supset$. El sistema G' de Gentzen es otra axiomatización para la lógica proposicional. Se puede decir que es la formalización de las pruebas semánticas de validez por contradicción. Recordemos este procedimiento.

Ejemplo

Sea $\mathcal{B}$ la fórmula

$$\mathcal{B} : (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

Decidir si $\mathcal{B}$ es válida o no.

Sol. La idea es falsificar $\mathcal{B}$ y averiguar si esto es posible. Pero ahora usaremos parejas formadas por conjuntos de fórmulas. El primer conjunto estará formada por fórmulas válidas y el segundo conjunto de fórmulas falsas:

$$(\underbrace{\{\ldots\}}_{\textbf{true}}, \underbrace{\{\ldots\}}_{\textbf{false}}).$$

Comenzamos poniendo:

$$(\{\}, \{(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)\})$$

es decir, comenzamos suponiendo $\mathcal{B}$ es **false**. Pero esto ocurre sólo cuando $P \supset Q$ es **true** y $\neg Q \supset \neg P$ **false**. Por lo que ponemos

$$(\{P \supset Q\}, \{\neg Q \supset \neg P\})$$

pero $P \supset Q$ es **true** sólo cuando P es **false** ó Q es **true**. Escribimos:

$$(\{\}, \{P, \neg Q \supset \neg P\}) \text{ ó } (\{Q\}, \{\neg Q \supset \neg P\})$$

pero $\neg Q \supset \neg P$ es **false** sólo cuando $\neg Q$ es **true** y $\neg P$ es **false**:

$$(\{\neg Q\}, \{P, \neg P\}) \text{ ó } (\{Q, \neg Q\}, \{\neg P\})$$

La siguiente deducción debe de ser obvia:

$$(\{P\}, \{P, Q\}) \text{ ó } (\{Q, P\}, \{Q\}).$$

Nótese que en el primer caso se obtiene que P es **true** y **false** lo cual es una contradicción. Y en el segundo Q es **true** y **false** también una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es válida.

De hecho las deducciones anteriores se acostumbran denotar como:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\{P\},\{P,Q\})}{(\{\neg Q\},\{P,\neg P\})}}{(\{\},\{P,\neg Q \supset \neg P\})} \qquad \dfrac{\dfrac{(\{Q,P\},\{Q\})}{(\{Q,\neg Q\},\{\neg P\})}}{(\{Q\},\{\neg Q \supset \neg P\})}}{(\{P \supset Q\},\{\neg Q \supset \neg P\})}}{(\{\},\{(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)\})}$$

donde las deducciones se colocan de abajo hacia arriba. Este árbol se llama *árbol de deducción*, y las parejas usadas se llaman *secuentes*.

Definición

Un **secuente** *es una pareja* (Γ, Δ) *de conjuntos finitos de fórmulas (vacíos quizá):*

$$\Gamma = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$$
$$\Delta = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}$$

El conjunto Γ *se llama* **antecedente** *y* Δ **sucedente**.

Notación:

En lugar de escribir (Γ, Δ) se escribe $\Gamma \to \Delta$. Y en lugar de $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ se escribe $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$:

$$\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$$

es un secuente. Si $\Gamma = \varnothing$ se pone $\to \Delta$; si $\Delta = \varnothing$ se pone $\Gamma \to$, y si $\Gamma = \Delta = \varnothing$ se pone $\to$ que se llama **secuente inconsistente.**

Definición

El **sistema de Gentzen** G' *es una teoría formal con fórmulas bien formadas con conectivos* $\wedge, \vee, \neg, \supset$ *junto con los secuentes.*

- Los axiomas son secuentes: $\Gamma \to \Delta$ tal que $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.
- Las reglas de inferencia son:
  1. 1.1

     $$\frac{\Gamma, \mathcal{B}, \mathcal{C}\Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\wedge\text{: izquierda})$$

     1.2

     $$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B}, \Lambda \quad \Gamma \to \Delta, \mathcal{C}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \Lambda}(\wedge\text{: derecha})$$

2. 2.1

$$\frac{\Gamma, \mathcal{B}, \Delta \to \Lambda \quad \Gamma, \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\vee\text{: izquierda})$$

2.2

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \Lambda}(\vee\text{: derecha})$$

3. 3.1

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda \quad \Gamma, \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\supset\text{: izquierda})$$

3.2

$$\frac{\mathcal{B}, \Gamma \to \mathcal{C}, \Delta, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \Lambda}(\supset\text{: derecha})$$

4. 4.1

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda}{\Gamma, \neg\mathcal{B}, \Delta \to \Lambda}(\neg\text{: izquierda})$$

4.2

$$\frac{\mathcal{B}, \Gamma \to \Delta, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \neg\mathcal{B}, \Lambda}(\ \neg\text{: derecha})$$

Cada regla consiste de dos o tres secuentes: el o los superiores se llaman **premisas** y el inferior **conclusión**.
Para cada regla, la proposición a la cual se le aplica la regla se llama **fórmula principal**; las proposiciones que permanecen sin cambio se llaman **fórmulas extras**.

Ejemplo

De $\supset$ izquierda:

$$\frac{\overbrace{\mathcal{B}}^{\text{lateral}},\ \overbrace{\mathcal{C}}^{\text{lateral}} \to P, \mathcal{D} \qquad Q,\ \overbrace{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{\text{laterales}} \to \overbrace{\mathcal{D}}^{\text{lateral}}}{\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{lateral}},\ \underbrace{P \supset Q}_{\text{fórmula principal}},\ \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{lateral}} \to \underbrace{\mathcal{D}}_{\text{lateral}}}$$