Definición

Si $\mathcal{B}$ es válida se escribe $\models \mathcal{B}$.

Teorema (Completez)

Si $\models \mathcal{B}$ entonces $\vdash \mathcal{B}$.

Dem. Sean $B_1, \ldots, B_k$ las letras proposicionales de $\mathcal{B}$. Por el lema de Kálmar, tenemos que para cualquier I interpretación de $\mathcal{B}$, se cumple

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{B}$$

pues $\mathcal{B}$ es válida. Sea J una asignación en las letras proposicionales $B_1, \ldots, B_{k-1}$, que acompletamos a asignaciones I_0, I_1 de $\mathcal{B}$ definiendo $I_0[B_k] = \textbf{false}$ y $I_1[B_k] = \textbf{true}$. Luego, usando I_1, I_0 se obtienen $B_1', \ldots, B_{k-1}', B_k \vdash \mathcal{B}$ y $B_1', \ldots, B_{k-1}', \neg B_k \vdash \mathcal{B}$, entonces

1. $B'_1, \ldots, B'_{k-1} \vdash B_k \to \mathcal{B}$, deducción
2. $B'_1, \ldots, B'_{k-1} \vdash \neg B_k \to \mathcal{B}$
3. $(\mathcal{B}_k \to \mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{B}) \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$, Lema anterior
4. $(\neg B_k \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B}$, MP 1,3
5. $\mathcal{B}$, MP 2,4

esto es,

$$B'_1, \ldots B'_{k-1} \vdash \mathcal{B}.$$

Hemos eliminado una hipótesis para probar $\mathcal{B}$. Similarmente podemos eliminar otras, esto es, $B'_1, \ldots B'_{k-2} \vdash \mathcal{B}, \ldots, B'_1 \vdash \mathcal{B}$ y finalmente $\vdash \mathcal{B}$.

Corolario

No existe una fórmula $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}$ y $\neg\mathcal{B}$ sean ambas teoremas (esto se llama consistencia de la teoría L).

Proof.

Si $\vdash \mathcal{B}$ y $\vdash \neg\mathcal{B}$, entonces, por el teorema de validez $\models \mathcal{B}$ y $\models \neg\mathcal{B}$, esto es, la tabla de verdad de $\mathcal{B}$ consiste de sólo 1's y también la de $\neg\mathcal{B}$, lo cual es absurdo. $\square$

Independencia de los axiomas de *L*

Definición

Sea Y un subconjunto de axiomas de una teoría. El conjunto Y se dice independiente si no existe una fórmula $\mathcal{F} \in Y$ tal que $\mathcal{F}$ puede ser deducida por medio de las reglas de inferencia de los axiomas de $Y \setminus \{\mathcal{F}\}$.

Propiedad

El conjunto de axiomas A1, A2, A3 es independiente.

Dem. Considérese las siguientes tablas de verdad exóticas (lógica multivaluada), en donde permitiremos tres valores de verdad: 0, 1 y 2;

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Sea $\mathcal{B}$ una fórmula. Si bajo cualquier asignación multivaluada $\mathcal{B}$ resulta siempre 0 entonces llamaremos a $\mathcal{B}$ *selecta*.

Afirmación: Modus ponens preserva selección.
Dem. de afirmación. Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son selectas. Por demostrar que $\mathcal{C}$ es selecta. Si $\mathcal{C}$ no es selecta, entonces existe una asignación multivaluada I tal que $\mathcal{C}$ es 1 ó 2. Si $\mathcal{C}$ es 1, entonces examinando la tabla de verdad de $\to$ resulta que $\mathcal{B}$ es 2: imposible, pues $\mathcal{B}$ es por hipótesis selecta. Mientras que si $\mathcal{C}$ es 2, de nuevo, por la tabla de verdad, resulta $\mathcal{B}$ es 1 ó 2: imposible, pues $\mathcal{B}$ es selecta. Por tanto $\mathcal{C}$ es selecta.

Ahora, la fórmula del axioma A1 en letras proposicionales, no es selecta porque si $I : \{B \mapsto 0, \mathcal{C} \mapsto 1\}$ entonces $B \to (C \to B)$ es 2. Sin embargo, los axiomas A2 y A3 son selectas pues

(	$\mathcal{B}$	$\to$	$(\mathcal{C}$	$\to$	$\mathcal{D}))$	$\to$	(	$(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$	$\to$	$(\mathcal{B} \to \mathcal{D})$	)
	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
	1	2	0	0	0	0		2	0	2	
	2	0	0	0	0	0		0	0	0	
	0	2	1	2	0	0		2	0	0	
	1	0	1	2	0	0		2	0	2	
	2	0	1	2	0	0		0	0	0	
	0	0	2	0	0	0		2	0	0	
	1	2	2	0	0	0		0	2	2	
	2	0	2	0	0	0		0	0	0	
	0	2	0	2	1	0		0	2	2	
	1	0	0	2	1	0		2	0	2	
	2	0	0	2	1	0		0	0	0	
	0	2	1	2	1	0		2	0	2	
	1	0	1	2	1	0		2	0	2	
	2	0	0	2	1	0		0	0	0	
	0	0	2	0	1	0		2	0	2	
	1	2	2	0	1	0		0	2	2	
	2	0	2	0	1	0		0	0	0	
	0	2	0	2	2	0		0	2	2	
	1	0	0	2	2	0		2	0	0	
	2	0	0	2	2	0		0	0	0	
	0	0	1	0	2	0		2	0	2	
	1	2	1	0	2	0		2	0	0	
	2	0	1	0	2	0		0	0	0	
	0	0	2	0	2	0		2	0	2	
	1	2	2	0	2	0		0	0	0	
	2	0	2	0	2	0		0	0	0	

Luego, $A2$ es selecta. Similarmente $A3$ es selecta.
Luego $A1$ no puede ser deducida por modus ponens de $A2$, $A3$. Es decir $A1$ es independiente de $A2, A3$.
Ahora considérese las tablas de verdad:

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

Llamaremos a una fórmula $\mathcal{B}$, *grotesca* si siempre toma el valor de verdad 0.

Afirmación:

Modus ponens preserva lo grotesco.

Dem. afirmación.

Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son grotescas. Probaremos por contradiccón que $\mathcal{C}$ es grotesca. Supongamos que $\mathcal{C}$ es NO es grotesca. Entonces existe una asignación donde $\mathcal{C}$ es 1 ó 2.
Si $\mathcal{C}$ es 1 entonces, por la tabla de verdad de $\to$, $\mathcal{B}$ es 2: contradicción.
Si $\mathcal{C}$ es 2 entonces $\mathcal{B}$ es 1 ó 2: contradicción.

$\square$

Un cálculo ditecto muestra que $A1$ y $A3$ son grotescas. Luego todas las deducciones de éstas. Pero $A2$ no es grotesca: pues para

$$I : \{B \mapsto 0, C \mapsto 0, D \mapsto 1\}$$

se obtiene que $A2$ es 2:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{B}_{0} \to \underbrace{(\underbrace{C}_{0} \to \underbrace{D}_{1})}_{2})}_{1} \to \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{B}_{0} \to \underbrace{C}_{0})}_{0} \to \underbrace{(\underbrace{B}_{0} \to \underbrace{D}_{1})}_{2})}_{1}}_{2}$$

Así, $A2$ no puede ser deducido de $A1$ y $A3$.

Finalmente: la independencia de $A3$. Con las tablas de verdad normales definiremos, para $\mathcal{B}$ una fórmula y $h(\mathcal{B})$ la fórmula tomada de $\mathcal{B}$ eliminando los símbolos negación: $\mathcal{B}$ se llama *super* si $h(\mathcal{B})$ es tautología.
Nótese que $h(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ es $h(\mathcal{B}) \to h(\mathcal{C})$.
Afirmación: Modus ponens preserva superioridad.

Dem. afirmación.

1. $\mathcal{B}$ super, hip.
2. $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ super, hip.
3. $h(\mathcal{B})$ tautología, (1)
4. $h(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ tautología (2)
5. $h(\mathcal{B}) \to h(\mathcal{C})$ es tautología, de (4)
6. $h(\mathcal{C})$ es tautología, de (3), (5), pues modus ponens preserva validez,
7. $\mathcal{C}$ es super, por definición de (6).

$\square$

Así cada fórmula derivable de $A1$, $A2$ y modus ponens es super. Pero $A3$ no es super: $h((\neg C \to \neg B) \to ((\neg C \to B) \to C))$ es $(C \to B) \to ((C \to B) \to C)$ la cual no es una tautología (póngase $I : \{C \mapsto 0, B \mapsto 0\}$).