El ejemplo y la tarea anterior son parte de un teorema general.

### Definición

*Sea $\mathcal{B}$ una fórmula, $I$ una asignación. Se define*

$$\mathcal{B}' = \begin{cases} \mathcal{B} & \text{si } I \models \mathcal{B} \\ \neg\mathcal{B} & \text{si } I \not\models \mathcal{B} \end{cases}$$

## Lema (Kálmar)

*Sea $\mathcal{B}$ una fórmula con $B_1, \ldots, B_k$ sus letras proposicionales. Sea $I$ una interpretación. Usando tal interpretación,*

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{B}'.$$

Antes de la demostración de este lema, daremos ejemplos sobre lo que intenta decir.

## Ejemplo

Sea $\mathcal{B}$ la fórmula $\neg(\neg A_2 \to A_5)$. Tenemos cuatro posibles interpretaciones dadas por la tabla de verdad:

| | $A_2$ | $A_5$ | $\neg$ | ( | $\neg$ | $A_2$ | $\to$ | $A_5$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 0 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| $I_2$ | 0 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| $I_3$ | 1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| $I_4$ | 1 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 1 | |

Entonces, cada interpretación da lugar, según el Lema 1, a las siguientes:

1. $\neg A_2, \neg A_5 \vdash \neg(\neg A_2 \rightarrow A_5)$
2. $\neg A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \rightarrow A_5)$
3. $A_2, \neg A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \rightarrow A_5)$
4. $A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \rightarrow A_5)$

que se pueden probar, siguiendo los casos de los esquemas de pruebas anteriores:

1. Por el caso 2(3) basta con probar que

$$\neg A_2, \neg A_5 \vdash \neg A_2 \text{ y } \neg A_2, \neg A_5 \rightarrow \neg A_5$$

lo cual es obvio. Escribamos la prueba.

1.1 $\neg A_2$, Hip.
1.2 $\neg A_5$, Hip.
1.3 $\neg A_2 \rightarrow (\neg A_5 \rightarrow \neg(\neg A_2 \rightarrow A_5))$, por Lema anterior,
1.4 $\neg A_5 \rightarrow \neg(\neg A_2 \rightarrow A_5)$, MP (a),(c)
1.5 $\neg(\neg A_2 \rightarrow A_5)$, MP (b), (d)

2. Según el caso 1 basta con

$$\neg A_2, A_5 \vdash \neg A_2 \to A_5$$

y ahora según el caso 2(2) basta con

$$\neg A_2, A_5 \vdash A_5$$

lo cual es obvio. La prueba es:

2.1 $\neg A_2$, Hip.
2.2 $A_5$, Hip.
2.3 $A_5 \to (\neg A_2 \to A_5)$, Ax1
2.4 $\neg A_2 \to A_5$, MP (b),(c)
2.5 $(\neg A_2 \to A_5) \to \neg\neg(A_2 \to A_5)$, doble negación
2.6 $\neg\neg(A_2 \to A_5)$ MP (d),(e)

3. Según el caso 1 basta con

$$A_2, \neg A_5 \vdash \neg A_2 \to A_5$$

y a su vez, por el caso 2(1) basta con

$$A_2, \neg A_5 \vdash \neg\neg A_2$$

y por el caso 1 basta con

$$A_2, \neg A_5 \vdash A_2$$

lo cual es obvio. Reconstruyamos la prueba:

3.1 $A_2$, Hip.
3.2 $\neg A_5$, Hip.
3.3 $A_2 \to \neg\neg A_2$, doble negación
3.4 $\neg\neg A_2$, MP (a), (c)
3.5 $\neg\neg A_2 \to (\neg A_2 \to A_5)$, Lema anterior
3.6 $\neg A_2 \to A_5$, MP (d),(e)
3.7 $(\neg A_2 \to A_5) \to \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, doble negación
3.8 $\neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, MP (f),(g)

4. Ver ejemplo lección 10.

El procedimiento anterior se resume en la prueba de Lema 1:
Demostración de Lema 1: Definimos $\theta(\mathcal{B})$ la complejidad de $\mathcal{B}$ como su número de conectivos, y procedemos por inducción sobre $\theta(\mathcal{B})$.
Si $\theta(\mathcal{B}) = 0$ entonces $\mathcal{B}$ es sólo una letra proposicional $B_1$ que tiene tabla de verdad

| $B_1$ | $\mathcal{B}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

entonces se afirma que $\mathcal{B}_1' \vdash \mathcal{B}'$, eso es

$$B_1 \vdash \mathcal{B}, \qquad \text{si } B \text{ es } \textbf{true}$$
$$\neg\mathcal{B}_1 \vdash \neg\mathcal{B} \qquad \text{si } B \text{ es } \textbf{false}$$

es decir

$$B_1 \vdash B_1$$
$$\neg B_1 \vdash \neg B_1$$

lo cual es obviamente cierto.

Supongamos ahora cierto el resultado para fórmulas $\mathcal{C}$ tales que $\theta(\mathcal{C}) < n = \theta(\mathcal{B})$. Por demostrar que el resultado es cierto para $\mathcal{B}$. Sea $I$ una interpretación de $\mathcal{B}$. Tenemos un par de casos:

1. $\mathcal{B}$ es $\neg\mathcal{C}$
2. $\mathcal{B}$ es $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

1. Ahora hay un par de subcasos
    1.1 $I \models \mathcal{C}$
    1.2 $I \not\models \mathcal{C}$

1. 1.1 Se sigue que $I \not\models \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es $\neg\neg\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ es $\mathcal{C}$. Como $\theta(\mathcal{C}) < \theta(\mathcal{B})$ e hipótesis de inducción se obtiene

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$$

luego por el esquema de prueba en el caso 1 se puede obtener

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\neg\neg\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'}$$

1.2 $I \models \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}'$ es $\neg\mathcal{C}$. De nuevo, como $\mathcal{C}$ tiene menos conectivos que $\mathcal{B}$ e hipótesis de inducción,

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{C}'}_{\neg\mathcal{C}}$$

pero como $\neg\mathcal{C}$ es $\mathcal{B}$,

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$

2. Como $\theta(\mathcal{C}), \theta(\mathcal{D}) < n$ podemos aplicar la hipótesis de inducción para obtener que

$$B'_1, \dots, B'_k \vdash \mathcal{C}'$$
$$B'_1, \dots, B'_k \vdash \mathcal{D}'.$$

Ahora tenemos cuatro subcasos:

2.1 $I \not\models \mathcal{C}, I \not\models \mathcal{D}$
2.2 $I \not\models \mathcal{C}, I \models \mathcal{D}$
2.3 $I \models \mathcal{C}, I \not\models \mathcal{D}$
2.4 $I \models \mathcal{C}, I \models \mathcal{D}$

2. 2.1 Se sigue $I \models \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es $\mathcal{B}$. Como $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathcal{C}$, entonces, por el esquema de prueba en el caso 2(1), se sigue que

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{C} \to \mathcal{D}}_{\mathcal{B}'}.$$

   2.2 Lo mismo que el anterior.

   2.3 Se sigue que $I \not\models \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}'$ es $\neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D})$. Como $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{C}$ y $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathcal{D}$, podemos usar el esquema de prueba en el caso 2(3) para obtener

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D})}_{\mathcal{B}'}.$$

   2.4 Ahora tenemos $I \models \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B}'$ es $\mathcal{B}$. Como $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{D}$, podemos usar el esquema de prueba del caso 2(1) para obtener

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{C} \to \mathcal{D}}_{\mathcal{B}'}.$$