La idea es que cada fórmula en L que es un teorema es una fórmula válida (tautología). Esto lo justifica el *teorema de validez* que se enuncia y se prueba más adelante. La novedad es que la válidez se puede obtener sin hacer interpretaciones. Usando los axiomas se obtienen argumentos exclusivamente sintácticos de la validez de fórmulas.

Propiedad

Modus ponens preserva validez. Esto es si $\mathcal{B}$ es válida y $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es válida entonces $\mathcal{C}$ es válida.

Proof.

Por contradicción. Supongamos que $\mathcal{C}$ no es válida, entonces existe una interpretación I tal que:

1. $I \not\models \mathcal{C}$, hip.
2. $I \models \mathcal{B}$, hip
3. $I \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ semántica de $\to$ (1), (2)
4. $I \models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
5. $I \models \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, semántica de $\neg$, (3)
6. $I \models \bot$ (4), (5)

$\square$

Tarea

Muestre que los axiomas A2 y A3 son válidos.

Teorema (validez)

Cada teorema de L es válido.

Dem. Primero se demostrará que cada axioma es válido. Por ejemplo A1:

1. $I \not\models B \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, hip.
2. $I \models \mathcal{B}$, $\to$ (1)
3. $I \not\models (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, $\to$ (1)
4. $I \models \mathcal{C}$, $\to$ (3)
5. $I \not\models \mathcal{B}$, $\to$, (3)
6. $I \models \neg B$, $\neg$ (4)
7. $I \models \perp$, (2) (5)

Similarmente se prueba que los axiomas A2, A3 son válidos. Luego, como modus ponens preserva validez, cualquier fórmula que se deduzca de los axiomas en L por aplicación de una o varias veces modus ponens, resultará en una fórmula válida. Pero precisamente estos son los teoremas.

Tarea

Considérese las siguientes reglas de inferencia:

1. *Moduls tollens: de* $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *y* $\neg\mathcal{C}$ *se infiere* $\neg\mathcal{B}$
2. *Silogismo hipotético: de* $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *y* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *se infiere* $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$
3. *Simplificación: de* $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ *se infiere* $\mathcal{B}$*; y de* $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ *se infiere* $\mathcal{C}$
4. *Dilema constructivo: de* $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{D} \to \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{B} \vee \mathcal{D}$ *se infiere* $\mathcal{C} \vee \mathcal{F}$

Mostrar que cada una de estas reglas de inferencia preserva validez.

Hay ciertos esquemas de pruebas que ayuda a automatizar el proceso de hacer demostraciones.

Caso 1 Si $\mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \neg\neg\mathcal{C}$

Proof.

Tenemos

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k-1} \\ \mathcal{C} \end{array}\right\} \text{prueba de } \mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{C}, \text{ doble negación}$$

$$\neg\neg\mathcal{C}, \text{MP}$$

la cual es una prueba de $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \neg\neg\mathcal{C}$. $\square$

Caso 2 1. Si $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \neg\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Proof.

Tenemos

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k-1} \\ \neg\mathcal{C} \end{array}\right\} \text{prueba de } \mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \neg\mathcal{C}$$

$$\neg\mathcal{C} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \text{ por Lema anterior}$$

$$\mathcal{C} \to \mathcal{D}, \text{MP}$$

□

Caso 2 2. Si $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{D}$ entonces $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Proof.

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k-1} \\ \mathcal{D} \end{array}\right\} \text{prueba de } \mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \text{ Ax1}$$

$$\mathcal{C} \to \mathcal{D}, \text{ MP}$$

$\square$

Caso 2 3. Si $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C}$ y $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \neg\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D})$

Proof.

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k-1} \\ \mathcal{C}, \quad (*) \end{array}\right\} \text{prueba de } \mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k-1} \\ \neg\mathcal{D}, \quad (**) \end{array}\right\} \text{prueba de } \mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \neg\mathcal{D}$$

$$\mathcal{C} \to (\neg\mathcal{D} \to \neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D})), \text{ Lema anterior}$$

$$\neg\mathcal{D} \to \neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \text{MP}(*)$$

$$\neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \text{ MP } (**)$$

$\square$

Ejemplo

$A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$

Sol. Por el caso 1, basta con probar

$$A_2, A_5 \vdash \neg A_2 \to A_5$$

y por el caso 2(2) basta con

$$A_2, A_5 \vdash A_5$$

lo cual es obvio. Recordemos que el razonamiento que acabamos de hacer es una metaprueba. Escribamos la prueba:

$$A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$$

Proof.

1. A_5 hip. (prueba de $A_2, A_5 \vdash A_5$)
2. $A_5 \to (\neg A_2 \to A_5)$, Ax1
3. $\neg A_2 \to A_5$, MP 1,2
4. $(\neg A_2 \to A_5) \to \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, doble negación
5. $\neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, MP 3,4

$\square$

Tarea

Pruebe:

1. $\neg P, \neg Q \vdash (\neg P \to \neg Q) \to (P \to Q)$
2. $P, Q, R \vdash (\neg\neg P \to Q) \to R$
3. $P, \neg Q \vdash \neg\neg\neg(P \to Q)$
4. $P, Q, \neg R \vdash \neg(P \to Q \to R)$