Como un ejemplo del uso de ésta álgebra es la siguiente propiedad.

Propiedad

Si $r = s^* t$ *entonces* $r = sr \cup t$

Proof.

$$
\begin{aligned}
r = s^* t &= (\epsilon s^+)t && \text{pues } L(s^*) = L(\epsilon) \cup L(s^+) \\
&= (\epsilon \cup ss^*)t && \text{por definición de } s^+ \\
&= \epsilon t \cup ss^* t && \text{por (8)} \\
&= t \cup sr && \text{por hipótesis y (5)} \\
&= sr \cup t && \text{por (1)}
\end{aligned}
$$

□

Tarea

1. *¿De que conjunto de símbolos se derivan las frases inglesas?*
2. *¿Por qué el lenguaje vacío no es el mismo que* $\{\epsilon\}$*?*
3. *¿Sea* $\Sigma = \{1\}$*. ¿Se puede decir que para todo número natural* n *hay alguna palabra* $w \in \Sigma^*$ *para la cual* $|w| = n$*? ¿es única? ¿Qué ocurriría si* $\Sigma = \{1, 2\}$*?*
4. *Para una palabra* w*, ¿se puede decir que*

   $$|w^{i+j}| = |w^i| + |w^j|?$$

   Encontrar una expresión para $|w^{i+j}|$ *en términos de* i, j *y* $|w|$*.*
5. *¿La cadena vacía es un prefijo de sí misma?*
6. *Definir las nociones de sufijo y sufijo propio de una cadena sobre un alfabeto. Dar ejemplos.*
7. *Obtener todos los prefijos, sufijos y subpalabras de la palabra* $w = bar$ *sobre el alfabeto inglés.*

Tarea

1. *Sea* $x \in \Sigma^*$. *Probar que* $(x^I)^I = x$.
2. *Para un lenguaje arbitrario* A, *¿qué es* $A \cdot \varnothing$*?*
3. *Sean* $A = \{el, mi\}$ *y* $B = \{caballo, casa, herradura\}$ *lenguajes sobre el alfabeto ingés. Obtener* $A \cdot B$, $A \cdot A$ *y* $A \cdot B \cdot B$.
4. *Suponer que* $A = \{\epsilon, a\}$. *Obtener* A^n *para* $n = 0, 1, 2, 3$ *¿Cuántos elementos tiene* A^n *para n arbitrario? ¿Cuáles son las cadenas de* A^n *para n arbitrario?*
5. *Sea* $A = \{\epsilon\}$. *Obtener* A^n *para n arbitrario.*
6. *Sean* $A = \{\epsilon, ab\}$ *y* $B = \{cd\}$ *¿Cuántas cadenas hay en* $A^n \cdot B$ *para n arbitrario?*
7. *Sean* $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. *Obtener* $A^n B$, AB^n *y* $(AB)^n$.
8. *Sean* $A = \{\epsilon\}$, $B = \{aa, ab, bb\}$, $C = \{\epsilon, aa, ab\}$ *y* $D = \varnothing$ *el lenguaje vacío. Obtener* $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$ *y* $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap D$, $A \cap D$. *Suponer que* F *es un lenguaje cualquiera. Obtener* $F \cup D$ *y* $F \cap D$.

9. ¿Bajo qué condiciones $A^* = A^+$?
10. Obsérvese que para todo lenguaje A se tiene que $\epsilon \in A^*$ ¿cuándo $\epsilon \in A^+$?
11. Probar que $\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\} = \{\epsilon\}^+$.
12. Antes se obtuvo que $A^* = A^0 \cup A^+ = \{\epsilon\} \cup A^+$. Cabría esperar que $A^+ = A - \{\epsilon\}$. Probar que, en general, ésta expresión no es cierta. ¿Cuándo se cumplirá que $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$.
13. Obtener lenguajes A, B, C tales que $A \cdot (B - C) \neq A \cdot B - A \cdot C$.
14. Probar que
    14.1 $(A^*)^* = A^*$
    14.2 $(A^*)^+ = A^*$
    14.3 $(A^+)^* = A^*$
15. Demostrar que se cumplen las siguientes igualdades para los lenguajes A y B sobre el alfabeto Σ:
    15.1 $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
    15.2 $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$
    15.3 $(A^+)^I = (A^I)^+$
    15.4 $(A^*)^I = (A^I)^*$

Tarea

1. *Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Lo siguiente es una definición recursiva del lenguaje A:*
   1.1 $\epsilon \in A$.
   1.2 *Si $x \in A$, entonces axb y bxa pertenecen a A.*
   1.3 *Si x e y pertencen a A, entonces xy pertenece a A.*
   1.4 *No hay nada más en A.*

   Probar que

   1.1
   $$A = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ tiene el mismo número de aes que de bes}\}$$
   1.2 *Si b y ϵ están en A ¿qué más palabras hay en A?*

2. Un *palíndromo* es una cadena que se lee igual hacia adelante que hacia atrás. Por ejemplo, la palabra "a" es un paíndromo, al igual que la cadena "radar". Dar una definición recursiva de un palíndromo (obsérvese que ϵ es un palíndromo).
3. Probar que para los lenguajes A y B, $(A \cup B)^* = (A^* B^*)^*$.

Tarea

1. *Verificar, aplicando la definición de lenguaje regular, que los siguientes son lenguajes regulares sobre* $\Sigma = \{a, b\}$*:*
   1.1 $\{a^i \mid i > 0\}$.
   1.2 $\{a^i \mid i > n\}$ *para* $n \geq 0$ *fijo.*
   1.3 $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ termina con } a\}$.
2. *Verificar que el lenguaje de todas las cadenas de ceros y unos que tienen al menos dos ceros consecutivos, es un lenguaje regular.*
3. *Los identificadores de Pascal son cadenas de longitud arbitraria compuestas por caracteres alfabéticos y por dígitos. Los identificadores de Pascal deben empezar con un carácter alfabético. ¿Es este un lenguaje regular?*
4. *Obtener una expresión regular que represente el lenguaje de los identificadores de Pascal.*

5.
   5.1 Probar que $(r \cup \epsilon)^* = r^*$.
   5.2 Probar que $(b \cup aa^*b) \cup (b \cup aa^*b)(a \cup ba^*b)^*(a \cup ba^*b)$ y $a^*b(a \cup ba^*b)^*$ son equivalentes.
   5.3 Sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$ ¿son equivalentes las parejas de expresiones regulares de cada apartado?
   5.4 $(a \cup b)^*a^*$ y $((a \cup b)a)^*$.
   5.5 $\varnothing^{**}$ y ϵ.
   5.6 $((a \cup b)c)^*$ y $(ac \cup bc)^*$.
   5.7 $b(ab \cup ac)$ y $(ba \cup ba)(b \cup c)$.
6. Simplificar:
   6.1 $\varnothing^* \cup a^* \cup b^* \cup (a \cup b)^*$.
   6.2 $((a^*b^*)^* \cdot (b^*a^*)^*)^*$.
   6.3 $(a^*b)^* \cup (b^*a)^*$.
   6.4 $(a \cup b)^*a(a \cup b)^*$.

7. Probar que $(aa)^*a = a(aa)^*$.
8. Simplificar las siguientes expresiones regulares:
   8.1 $(\epsilon \cup aa)^*$.
   8.2 $(\epsilon \cup aa)(\epsilon \cup aa)^*$.
   8.3 $a(\epsilon \cup aa)^* a \cup \epsilon$.
   8.4 $a(\epsilon \cup aa)^*(\epsilon \cup aa) \cup a$.