Definición

Sean r, s expresiones regulares sobre Σ. Se dice que r y s son equivalentes si y sólo si $L(r) = L(s)$ en tal caso se escribe $r = s$. Es decir,

$$r = s \Leftrightarrow L(r) = L(s)$$

Notemos que $r = s \Leftrightarrow$

1. $L(r) \subseteq L(s)$
2. $L(s) \subseteq L(r)$

También es fácil ver que si r es una expresión regular entonces $L(r)$ es un lenguaje regular.

Ejemplo

$$(a^* b)^* = \epsilon \cup (a \cup b)^* b$$

Dem. El alfabeto bajo consideración es $\Sigma = \{a, b\}$. Por definición

$$L((a^* b)^*) = (\{a\}^* \{b\})^*$$

que es el lenguaje formado por 0 o más concatenaciones de palabras de $\{a\}^* b$ esto es, palabras del tipo

$$\epsilon$$

$$a^{j_1} b \cdots a^{j_k} b$$

esto es, la palabra vacía junto con palabras que terminan en b. Este lenguaje es la descripción exactamente del lenguaje regular siguiente

$$\{\epsilon\} \cup (\{a, b\}^* \cdot \{b\}) = L(\epsilon \cup (a \cup b)^* b)$$

de donde

$$L((a^* b)^*) = L(\epsilon \cup (a \cup b)^* b)$$

por lo tanto

$$(a^* b)^* = \epsilon \cup (a \cup b)^* b$$

Ejemplo

Sea r una expresión regular, entonces

$$r^+ = r^* r$$

Proof.

Por propiedad anterior

$$\begin{aligned} L(r^+) &= L(r)^+ \\ &= L(r)^* L(r) \\ &= L(r^* r) \end{aligned}$$

lo que implica que $r^+ = r^* r$. $\square$

El álgebra de las expresiones regulares viene descrita en el siguiente teorema.

Teorema

Sean r, s, t expresiones regulares sobre Σ. Entonces

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \varnothing = r = \varnothing \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r\epsilon = \epsilon r = r$
6. $r\varnothing = \varnothing = \varnothing r$
7. $r(st) = (rs)t$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$ y $(r \cup s)t = rs \cup st$
9. $r^* = r^{**} = r^* r^* = (\epsilon \cup r)^* = r^*(r \cup \epsilon) = (r \cup \epsilon)r^* = \epsilon \cup rr^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^* = (r^* s)^* r^* = r^*(sr^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \epsilon \cup (r \cup s)^* s$

13. $(rs^*)^* = \epsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \epsilon)^*(r \cup \epsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$

Dem. Sólo haremos la demostración de una de estas equivalencias. La demás son similares.

(11) Por demostrar que

$$L(r(sr)^*) = L((rs)^* r) \tag{1}$$

Sea $w \in L(r(sr)^*) = L(r)(L(s)L(r))^*$ entonces

$$w = r_0 s_1 r_1 s_2 r_2 \cdots s_n r_n$$

con $r_0 \in L(r)$ y cada $s_i \in L(s)$, $r_i \in L(r)$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} w &= (r_0 s_1) \cdot (r_1 s_2) \cdots (r_{n-1} s_{n-1}) r_n \\ &\in (L(r) \cdot L(s))^* L(r) = L((rs)^* r) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L(r(sr)^*) \subseteq L((rs)^*r) \ .$$

Similarmente se prueba que $L((rs)^*r) \subseteq L(r(sr)^*)$. Se sigue entonces que la ecuación (1) es cierta. Se concluye entonces que

$$r(sr)^* = (rs)^*r$$