Lenguajes Regulares y Expresiones Regulares

Definición

Sea Σ un alfabeto. El **conjunto de los lenguajes regulares** *se define como:*

1. $\varnothing$ *es un lenguaje regular;*
2. $\{\epsilon\}$ *es un lenguaje regular;*
3. $\forall a \in \Sigma$, $\{a\}$ *es un lenguaje regular;*
4. *Si A, B son lenguajes regulares entonces*

$$A \cup B, \quad A \cdot B, \quad A^*$$

   son lenguajes regulares.

Esto es, el conjunto de los lenguajes regulares sobre Σ está formado por el lenguajes vacío, los lenguajes unitarios incluidos $\{\epsilon\}$ y todos aquellos obtenidos de estos por concatenación, unión y la cerradura de Kleene de éstos.

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Entonces

$$\varnothing, \{\epsilon\} \text{ son lenguajes regulares}$$

$$\{a\}, \quad \{b\} \text{ son lenguajes regulares}$$

$$\{a, b\} \text{ es lenguaje regular pues } \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$$

$$\{ab\} \text{ es regular pues } \{ab\} = \{a\} \cdot \{b\}$$

$$\{a, a, b, b\} = \underbrace{\{a, b\}}_{\text{regular}} \cup \underbrace{\{ab\}}_{\text{regular}} \text{ es regular}$$

$$\{a^i \mid i \geq 0\} = \{a\}^* \text{ es regular}$$

$$\{a^i b^j \mid i \geq 0 \text{ y } j \geq 0\} = \underbrace{\{a\}^*}_{\text{regular}} \cdot \underbrace{\{b\}^*}_{\text{regular}} \text{ es regular}$$

$$\{(ab)^i \mid i \geq 0\} = \{ab\}^* \text{ es regular} \ .$$

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ y A el lenguaje sobre Σ:

$$A = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ no tiene a } ac \text{ como subcadena}\}$$

¿Es A regular?

Sol. Notemos que

$$\{b\}\{c\}^* \subseteq A \text{ y } \{a\}^* \subseteq A$$

luego las palabras formadas por concatenaciones de potencias a^i y bc^j están en A; i.e.,

$$(\{a\} \cup \{b\}\{c\}^*)^* \subseteq A$$

luego

$$\{c\}^*(\{a\} \cup \{b\}\{c\}^*)^* \subseteq A \ .$$

Probaremos que

$$A = \{c\}^*(\{a\} \cup \{b\}\{c\}^*)^*$$

y así resultará que A es regular. Sólo falta comprobar que

$$A \subseteq \{c\}^*(\{a\} \cup \{b\}\{c\}^*)^* \ . \qquad (1)$$

Sea $w \in A$, entonces $w = c^i w'$ para algún $i \geq 0$ y w' palabra que no tiene a c como prefijo. Así, w' está formada por a's, b's y c's donde cualquier bloque de c's no puede seguir a a's, en consecuencia, cualquier bloque de c's sigue a $b's$, de donde

$$w' \in (\{a\} \cup b\{c\}^*)^*$$

entonces

$$w = c^i w' \in \{c\}^*(\{a\} \cup \{b\}\{c\}^*)^*,$$

por lo tanto

$$A = \{c\}^*(\{a\} \cup \{b\}\{c\}^*)^*$$

que es un lenguaje regular.

Las expresiones regulares se definen como sigue

Definición

Sea Σ un alfabeto.

1. *$\varnothing$ y ϵ son expresiones regulares;*
2. *Si $a \in \Sigma$ entonces a es una expresión regular;*
3. *Si r y s son expresiones regulares entonces*

$$r \cup s, \ r \cdot s, \ r^*$$

son expresiones regulares.

Como en las concatenaciones, a veces escribiremos

$$rs = r \cdot s$$

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Entonces

$$c^*(a \cup bc^*)^*$$

es una expresión regular.

Proof.

Tenemos que b es una expresión regular, así como c, entonces c^* es una expresión regular por lo que bc^* también. Lo es también a, luego $a \cup bc^*$ es expresión regular y en consecuencia $(a \cup bc^*)^*$ es regular. Finalmente $c^*(a \cup bc^*)^*$ es expresión regular. $\square$

Las expresiones regulares son *nombres* para los lenguajes regulares.

Definición

Sea Σ un lenguaje. El lenguaje L de una expresión regular sobre Σ se define como:

1. $L(\varnothing) = \varnothing$, $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$;
2. *Si* $a \in \Sigma$, $L(a) = \{a\}$;
3. *Si* r, s *son expresiones regulares entonces*
   - 3.1 $L(r \cup s) = L(r) \cup L(s)$
   - 3.2 $L(rs) = L(r)L(s)$
   - 3.3 $L(r^*) = L(r)^*$

Para calcular los lenguajes de expresiones regulares se hace uso del orden de precedencia:

1. cerraduras de Kleene: $*$
2. concatenaciones $:\cdot$
3. uniones: $\cup$

Ejemplo

$$L(a \cup ab^*) = L(a) \cup (L(a) \cdot L(b)^*)$$

Definición

Si r es una expresión regular entonces

$$r^+ = rr^*$$

Propiedad

$$L(r^+) = L(r)^+$$

Proof.

Por definición

$$\begin{aligned} L(r^+) &= L(rr^*) \\ &= L(r)L(r^*) \\ &= L(r)L(r)^* \\ &= L(r)^+ \end{aligned}$$

$\square$