Numerabilidad

Nos proponemos estudiar lo siguientes problemas:

1. Dado un lenguaje A y $x \in \Sigma^*$, ¿$x \in A^*$
2. Dado un lenguaje A, especificar qué palabras lo componen.

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b\}$.

1. ¿Cuántas palabras de longitud 0 hay?: ϵ. Sólo una.
2. ¿Cuántas palabras de longitud 1 hay?: a, b. Dos.
3. ¿Cuántas palabras de longitud 2 hay?: aa, ab, ba, bb. 4
4. ¿Cuántas palabras de longitud 3 hay?: 8
5. ¿Cuántas palabras de longitud n hay?: 2^n.

Podemos numerar las palabras de Σ^* según el siguiente orden

$$a < ab, \quad aa < ab, \quad a \leq baaaa$$

Podemos enumerar las palabras según este orden

$$\begin{aligned} \epsilon &\mapsto 0 \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 2 \\ aa &\mapsto 3 \\ ab &\mapsto 4 \\ ba &\mapsto 5 \\ bb &\mapsto 6 \\ aaa &\mapsto 7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sin embargo, por comodidad (para el caso general) también podemos enumerar usando números en base 3

$$
\begin{aligned}
\epsilon &\mapsto 0 \\
a &\mapsto 1 \\
b &\mapsto 2 \\
aa &\mapsto 11_3 = 4 \\
ab &\mapsto 12_3 = 5 \\
ba &\mapsto 21_3 = 7 \\
bb &\mapsto 22_3 = 8 \\
aaa &\mapsto 111_3 = 13 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Supongamos que $\Sigma = a_1, a_2, \ldots, a_n$. Podemos enumerar las palabras de Σ^* con números en base $n+1$ como

$$
\begin{aligned}
\epsilon &\mapsto 0 \\
a_1 &\mapsto 1 \\
a_2 &\mapsto 2 \\
&\vdots \\
a_n &\mapsto n \\
a_1 a_1 &\mapsto 11_{n+1} \\
a_1 a_2 &\mapsto 12_{n+1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

es decir, tenemos una función

$$f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$$

la cual es inyectiva, pues cada numero natural tiene una única representación en base. De donde se sigue que Σ^* es enumerable.

Teorema

Si Σ es un alfabeto entonces Σ^* es infinito numerable.

En contraste todos los lenguajes que se pueden formar con Σ no es numerable. Es decir, hay mucho más lenguajes que palabras. Se puede demostrar esto, usando lo que se llama la *técnica de diagonalización*.

Teorema

Sea Σ un alfabeto. El conjunto de los lenguajes sobre Σ no es numerable.

Dem. Sea

$$\mathcal{L} = \{A \,|\, A \text{ es lenguaje sobre } \Sigma\} \ .$$

Procedemos por contradicción. Supongamos que $\mathcal{L}$ es numerable. Entonces

$$\mathcal{L} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\} \ .$$

Sabemos que Σ^* es numerable, entonces podemos poner

$$\Sigma^* = \{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$$

definimos entonces el conjunto *diagonal*,

$$D = \{w_i \in \Sigma^* \,|\, w_i \notin A_i\} \subseteq \Sigma^*$$

D es un lenguaje sobre Σ^*, entonces $D \in \mathcal{L}$, por lo que debe de existir $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$D = A_k \ .$$

Tenemos dos casos $w_k \in D$ o $w_k \notin D$.

1. Si $w_k \in D$ entonces $w_k \notin A_k = D$, i.e., $w_k \notin D$: absurdo.
2. Si $w_k \notin D = A_k$ entonces $w_k \in D$: absurdo de nuevo

En cualquier caso obtenemos un absurdo. Por lo tanto $\mathcal{L}$ no es numerable.