Lema

Sean $A, A_0, A_1, \ldots$ *una colección infinita de lenguajes sobre* Σ*. Entonces*

1. $A \cdot \cup_{n=0}^{\infty} A_n = \cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A_n$
2. $(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) \cdot A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \cdot A$

Proof.

1. Por demostrar
   1.1 $A \cdot \cup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A_n$
   1.2 $\cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A_n \subseteq A \cdot \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

   (a): Si $x \in A \cdot \cup_{n=0}^{\infty} A_n$, entoces $x = w \cdot y$ con $w \in A$ y $y \in \cup_{n=0}^{\infty} A_n$, luego existe k_0 tal que $y \in A_{k_0}$, así $x = wy \in A \cdot A_{k_0}$, lo que implica que

   $$x \in \cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A_n \quad .$$

   (b): Si $x \in \cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A_n$ entonces existe k_0 tal que $x \in A \cdot A_{k_0}$, por lo que $x = wy$ con $w \in A$ y $y \in A_{k_0}$, es decir $y \in \cup_{n=0}^{\infty} A_n$. Así

   $$x \in A \cdot \cup_{n=0}^{\infty} A_n$$

   Por lo tanto

   $$A \cdot \cup_{n=0}^{\infty} A_n = \cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A_n \quad .$$

2. Tarea.

Teorema

$$A^+ = A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Proof.

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= A \cdot \cup_{n=0}^{\infty} A^n \\ &= \cup_{n=0}^{\infty} A \cdot A^n \\ &= \cup_{n=0}^{\infty} A^{n+1} \\ &= \cup_{k=1}^{\infty} A^k \\ &= A^+ \quad . \end{aligned}$$

y similarmente $A^* \cdot A = A^+$. $\square$

Ejemplo

Sea $\{A\} = \{ab\}$ lenguaje sobre el alfabeto inglés. Tenemos que

$$A^+ = \{ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^i \mid i \geq 1\}$$

el cual es a su vez un lenguaje. Podemos considerar sus potencias

$$\begin{aligned}(A^+)^2 &= A^+ \cdot A^+\\ &= \{ab \cdot ab, ab \cdot abab, ab \cdot ababab, \ldots, \quad abab \cdot ab, abab \cdot abab, abal\end{aligned}$$

el cual es un sublenguaje de A^+: $(A^+)^2 \subseteq A^+$. De forma similar $(A^+)^3 \subseteq A^+$, $(A^+)^4 \subseteq A^+, \ldots$. Este es un hecho general.

Lema

Sea A un lenguaje. Entonces

$$(A^+)^k \subseteq A^+, \quad \forall k \geq 1$$

Dem. Por inducción sobre k. Si $k = 1$:

$$(A^+)^k = (A^+)^1 = A^+ \subseteq A^+.$$

También el resultado es cierto para $k = 2$:

$$\begin{aligned}
(A^+)^2 &= A^+ \cdot A^+ \\
&= A^+ \cdot \cup_{n=1}^{\infty} A^n \\
&= \cup_{n=1}^{\infty} A^+ \cdot A^n \\
&= \cup_{n=1}^{\infty} \left(\cup_{j=1}^{\infty} A^j\right) \cdot A^n \\
&= \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} A^j \cdot A^n \\
&= \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} A^{j+n} \\
&\subseteq \cup_{m=1}^{\infty} A^m \\
&= A^+
\end{aligned}$$

Supongamos cierto que

$$(A^{+})^{k} \subseteq A^{+} \quad .$$

Por demostrar que $(A^{+})^{k+1} \subseteq A^{+}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(A^{+})^{k+1} &= A^{+} \cdot (A^{+})^{k} \\
&\subseteq A^{+} \cdot A^{+} \\
&= (A^{+})^{2} \\
&\subseteq A^{+}
\end{aligned}$$

Tarea

Sea $x \in \Sigma^*$. Demostrar que $(x^I)^I = x$.

Definición

Si A es un lenguaje, su **inverso** *es*

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Propiedad

Si A, B son lenguajes, entonces

$$(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$$

Dem. Por contenciones, demostraremos que

1. $(A \cdot B)^I \subseteq B^I \cdot A^I$
2. $B^I \cdot A^I \subseteq (A \cdot B)^I$

1. Sea $z \in (A \cdot B)^I$, entonces $z = x^I$ con $x \in A \cdot B$, por lo que $x = yw$ con $y \in A$ y $w \in B$. Luego

$$\begin{aligned} z &= (yw)^I \\ &= w^I y^I \in B^I \cdot A^I \end{aligned}$$

   Por lo tanto $(A \cdot B)^I \subseteq B^I \cdot A^I$.

2. Sea $z \in B^I \cdot A^I$, entonces $z = w^I \cdot y^I$ con $w \in B$ y $y \in A$. Por lo que

$$z = w^I y^I = (yw)^I \in (A \cdot B)^I \quad .$$

   Por lo tanto $B^I \cdot A^I \subseteq (A \cdot B)^I$.