Notemos que en general, no es cierto que

$$A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$$

por la culpa del contrajemeplo siguiente: $A = \{a, \epsilon\}$, $B = \{\epsilon\}$, $C = \{a\}$, entonces $B \cap C = \varnothing$ y así

$$A \cdot (B \cap C) = \varnothing$$

mientras que $A \cdot B = A = a, \epsilon$ y $A \cdot C = \{aa, a\}$, por lo que

$$(A \cdot B) \cap (A \cdot C) = \{a\} \neq A \cdot (B \cap C)$$

Uno de los concepto fundamentales de la teoría es el de *cerradura*.

Definición

Sea A lenguaje sobre el alfabeto Σ.

1. *La* **cerradura de Kleene** *o* **cerradura estrella** *de A es*

$$A^* = \cup_{n=0}^{\infty} A^n$$

2. *La* **cerradura positiva** *de A es*

$$A^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A^n$$

La cerradura de Kleene se obtiene al hacer cero o más concateneaciones de las palabras de A, mientras que la cerradura positiva se obtiene al hacer una o más concatenaciones.

Ejemplo

$A = \{a\}$. Entonces $A^0 = \{\epsilon\}$, $A^1 = a$, $A^2 = aa$, $A^3 = aaa, \ldots$ entonces

$$A^* = \{\epsilon, a, a^2, a^3, \ldots\}$$

mientras que

$$A^+ = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$$

Ejemplo

Sea Σ un alfabeto. En particular el propio Σ es un alfabeto formado por las palabras de longitud 1. Luego la cerradura de Kleene de Σ es

$$\cup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$$

que es ϵ junto con todas las concatenaciones de palabras sobre Σ que es precisamente el lenguaje universal Σ^*. Este razonamiento muestra que nuestra notación para el lenguaje universal es consistente con la notación de la cerradura de Kleene:

$$\underbrace{\Sigma^*}_{\text{lenguaje universal}} = \underbrace{\Sigma^*}_{\text{cerradura de Kleene}}$$

Propiedad

Si A es un lenguaje sobre Σ, entonces

1. $A^* \subseteq \Sigma^*$
2. $A^+ \subseteq A^*$

Proof.

1. $\forall n \geq 0$, $A^n \subseteq \Sigma^*$, entonces

$$A^* = \cup_{n=0}^{\infty} \subset \Sigma^*$$

2. $\forall k \geq 1$, $A^k \subseteq \cup_{n=0}^{\infty} A^n = A^*$, entonces

$$A^+ = \cup_{k=1}^{\infty} A^k \subseteq A^*$$

$\square$

Ejemplo

Tenemos que $\varnothing$ es un lenguaje. Entonces

$$\varnothing^0 = \{\epsilon\},\ \varnothing^1 = \varnothing,\ \varnothing^2 = \varnothing, \ldots$$

por lo que

$$\varnothing^* = \{\epsilon\}, \quad \varnothing^+ = \varnothing$$

Uno podría pensar que la diferencia entre la cerradura de Kleene y la cerradura positiva es la palabra vacía ϵ. *Esto no siempre es cierto*, como puede notarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$, y consideremos el lenguaje

$$A = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ no contiene ninguno de los dígitos } 2, 3, \ldots, 9\}$$

Luego, $\epsilon \in A$, $0 \in A$, $1 \in A$, $01010100111 \in A$. Nos proponemos demostrar que $A^* = A^+$.

Si $k \geq 1$ y $x \in A^k$, entonces $x = w_1 \cdots w_k$ con cada $w_i \in A$ cadena conteniendo sólo 0's y 1's. Luego x contiene sólo 0's y 1's. Por lo tanto,

$$\forall k \geq 1, A^k \subseteq A \quad .$$

Además, si $k \geq 1$ y $x \in A$, entonces $x = \epsilon^{k-1} x \in A^k$, esto es $A \subseteq A^k$:

$$\forall k \geq 1, A^k = A$$

Por lo que

$$A^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A^k = A \quad .$$

Pero también, como $A^0 = \{\epsilon\} \subseteq A$, se sigue

$$\begin{aligned} A^* &= A^0 \cup A^+ \\ &= A^0 \cup A \\ &= A \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A^* = A = A^+.$$

Como puede notarse del ejemplo anterior en algunos casos $A^+ = A^*$.