Operaciones con lenguajes

Así como las palabras se pueden concatenar, también se puede hacer una operación similar sobre lenguajes.

Definición

Si A es lenguaje sobre el alfabeto Σ_1 y B es lenguaje sobre el alfabeto Σ_2, se define el **lenguaje concatenación** *de A con B como*

$$A \cdot B = \{w \cdot w \,|\, w \in A \text{ y } x \in B\}$$

sobre el alfabeto $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Esto es, el lenguaje $A \cdot B$ está formado por todas las posibles concatenaciones de las cadenas de A con las de B. También, como en la concatenación de cadenas, el símbolo de concatenación "·" se acostumbra omitir y se pone $AB = A \cdot B$.

Ejemplo

Si $A = \{casa\}$, $B = \{pajaro, perro\}$, *entonces*

$$AB = \{casapajaro, casaperro\}$$

Entre los lenguajes, el lenguaje $\{\epsilon\}$ se comporta como 1 con respecto a la operación de concatenación.

Propiedad

Si A es un lenguaje arbitrario, entonces

$$A\{\epsilon\} = A = \{\epsilon\}A.$$

Proof.

$$\begin{aligned} A\{\epsilon\} &= \{w\epsilon \mid w \in A\}, && \text{por definición de concatenación,} \\ &= \{w \mid w \in A\} \\ &= A; \end{aligned}$$

similarmente se prueba $\{\epsilon\}A = A$. $\square$

También se puede hablar de potencia de un lenguaje:

Definición (Potencia)

Sea $n \in \mathbb{N}$*:*

$$A^n = \begin{cases} \{\epsilon\}, & \textit{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \textit{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo

1. $\varnothing^0 = \{\epsilon\}$
2. Sea $A = \{ab\}$ lenguaje formado por sólo una palabra. Entonces

$$A^0 = \{\epsilon\}$$
$$A^1 = A \cdot A^0 = A\{\epsilon\} = A = ab$$
$$A^2 = A \cdot A^1 = A\{ab\} = abab$$
$$A^3 = A \cdot A^2 = A\{abab\} = ababab$$

etcétera.

Definición

Sean A, B lenguajes. Entonces

1. *El* **lenguaje unión** *es:*

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

2. *El* **lenguaje intersección** *es*

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$$

3. *El* **lenguaje diferencia** *es*

$$A - B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y lenguajes $A = \{\epsilon, 0, 10, 11\}$, $B = \{\epsilon, 1, 0110, 11010\}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 0110, 11010\} \\
A \cap B &= \{\epsilon, 1\} \\
A - B &= \{0, 10, 11\} \\
B - A &= \{0110, 11010\}
\end{aligned}
$$

En general, como los lenguajes son conjuntos, los lenguajes heredan todas las propiedades y terminología de los conjuntos.

Definición

Sean A, B lenguajes sobre un alfabeto Σ. Si $A \subseteq B$, entonces se dice que A es **sublenguaje** *de B.*

Ejemplo

Sea $A = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa\}$ y $B = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces A es sublenguaje de B.

En general, si L es un lenguaje sobre un alfabeto Σ entonces L es un sublenguaje de Σ^*.

También, recordemos que de la definición de la igualdad de conjuntos podemos obtener que dos lenguajes A, B son iguales: $A = B$ si y sólo si

1. $A \subseteq B$
2. $B \subseteq A$

Esta observación nos ayudará a demostrar el siguiente teorema.

Teorema

Sean A, B, C lenguajes sobre un alfabeto Σ. Se cumple que

1. $A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$
2. $(B \cup C) \cdot A = (B \cdot A) \cup (C \cdot A)$

Dem.

1. Por contenciones, esto probaremos que
   1.1 $A \cdot (B \cup C) \subset (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$
   1.2 $(A \cdot B) \cup (A \cdot C) \subset A \cdot (B \cup C)$
   1.1 Si $x \in A \cdot (B \cup C)$ entonces $x = w \cdot y$ con $w \in A$ y $y \in B \cup C$; luego $y \in B$ ó $y \in C$. Si $y \in B$ entonces $x = wy \in A \cdot B$; y si $y \in C$, entonces $x = w \cdot y \in A \cdot C$, así,
   $$x \in (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$$
   1.2 Si $x \in (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$ entonces $x \in A \cdot B$ ó $x \in A \cdot C$. Si $x \in A \cdot B$ entonces $x = wy$ con $w \in A$ y $y \in B \subseteq B \cup C$, luego $x = wy$ con $w \in A$ y $y \in B \cup C$.
   Si $x \in A \cdot C$ entonces $x = wy$ con $w \in A$ y $y \in C \subseteq B \cup C$, entonces $x = wy$ con $w \in A$ y $y \in B \cup C$, luego $x \in A \cdot (B \cup C)$.
2. Tarea.