Sea puede escribir la propiedad (P) en términos de cuantificadores:

(P) $\exists(k \geq 0) \quad \forall(x, y, z \text{ con } xyz \in A \text{ y } |y| \geq k) \quad \exists(u, v, w \text{ con } y = uvw \text{ y } v \neq \epsilon) \quad \forall(i \geq 0) \quad (xuv^i wy \in A)$

luego la negación de (P) es:

$\neq$(P) $\forall(k \geq 0) \quad \exists(x, y, z \text{ con } xyz \in A \text{ y } |y| \geq k) \quad \forall(u, v, w \text{ con } y = uvw \text{ y } v \neq \epsilon) \quad \exists(i \geq 0) \quad (xuv^i wy \notin A)$

Lo que da lugar a la forma contrapositiva del lema del bombeo.

Teorema (Lema del bombeo)

Si A es un lenguaje tal que

1. $\forall(k \geq 0)$
2. $\exists(x, y, z \text{ con } xyz \in A \text{ y } |y| \geq k)$
3. $\forall(u, v, w \text{ con } y = uvw \text{ y } v \neq \epsilon)$
4. $\exists(i \geq 0)$
5. $(xuv^i wy \notin A)$

entonces A no es regular.

Esta versión contrapositiva puede interpretarse como un juego: Ud versus *un demonio*. Tal juego se juega con un lenguaje A. Ud hace las veces del cuantificador existencial $\exists$, mientras que el demonio hace las veces del cuantificador universal $\forall$. Ud gana el juego si puede demostrar que A No es regular; el demonio gana si logra impedir esto.
La descripción del juego es la siguiente:

1. El demonio escoge $k \geq 0$.
2. Ud. debe responder con tres cadenas x, y, z tales que $xyz \in A$ y $|y| \geq q$.
3. El demonio elige otras tres cadenas u, v, w tales que $y = uvw$ y $v \neq \epsilon$.
4. Ud. elige un $i \geq 0$
5. Ud. gana si $xuv^iwz \notin A$, el demonio gana en caso contrario.

Ejemplo

Mostrar que

$$A = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$$

no es regular.

Dem. Como un juego vs demonio.

1. Sea $k \geq 0$ (la elección del demonio).
2. Nosotros elegimos $x = a^k, y = b^k, z = \epsilon$ con $xyz = a^k b^k \epsilon = a^k b^k \in A$ y $|y| \geq k$.
3. El demonio elige palabras u, v, w tales que $b^k = y = uvw$ con $v \neq \epsilon$ De aquí se deduce que $u = b^\ell, v = b^m, w = b^n$ con $m > 0$.
4. Nosotros tenemos que responder con un número $i \geq 0$ tal que nos haga ganar el juego. El ganar o perder depende de si la contatenación $xuv^i wz$ está o no en el lenguaje A. Calculemos tal concatenación:

$$\begin{aligned} xuv^i wz &= a^k b^\ell b^{im} b^n \\ &= a^k b^\ell b^m b^n b^{im-m} \\ &= a^k b^k b^{im-m} \\ &= a^k b^{k+(i-1)m} \end{aligned}$$

y ésta palabra no pertenecerá a A cuando por ejemplo, $i = 2$. Respondemos con $i = 2$.

5. Se calcula $xuv^i wz$ para saber quien ganó el juego:

$$\begin{aligned} xuv^i wz &= xuv^2 wz \\ &= a^k b^\ell b^{2m} b^n \epsilon \\ &= a^k b^\ell b^m b^n b^m \\ &= a^k b^k b^m \\ &= a^k b^{k+m} \notin A \end{aligned}$$

Así que nosotros ganamos, esto es, A es no regular.

Tarea

1. *Probar que el lenguaje*

$$L = \{a^p \mid p \text{ es primo}\}$$

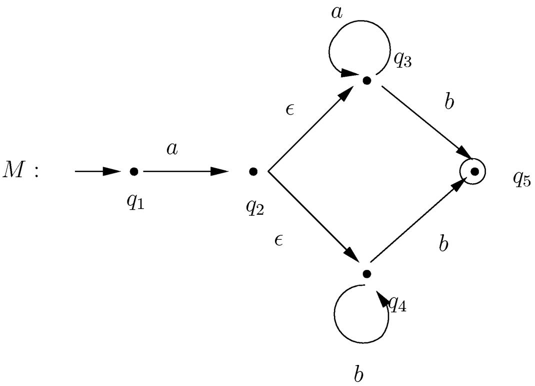
   no es regular.

2. *Determinar si los siguientes lenguajes son regulares y decir o probar por qué si o por qué no.*

   2.1 $\{a^i b^{2i} \mid i \geq 1\}$
   2.2 $(ab^i \mid i \geq i$
   2.3 $\{a^{2n} \mid n \geq 0\}$
   2.4 $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$

Lenguajes Independientes del Contexto

Gramáticas regulares. Un autómata finito puede considerarse como un generador de lenguajes: si M es un AF entonces genera a $L(M)$. Por ejemplo, consideremos



es tal que

$$L(M) = a(a^* \cup b^*)b$$

Las cadenas aceptadas por M se empiezan a producir como:

$$S \to aE$$

(la flecha se leeerá "produce"), donde S es un símbolo llamado *inicial* y E es un símbolo llamado "no terminal". A su vez, el símbolo E tiene dos posibilidades subsecuentes:

$$E \to A$$

ó

$$E \to B$$

dependiente de la ϵ-transición hacia q_3 ó q_4, donde A y B son también símbolos no terminales. Si A indica el camino superior, tenemos

$$A \to aA$$

ó

$$A \to b$$

donde ahora b es un *símbolo terminal*. Similarmente, para el camino inferior,

$$B \rightarrow bB$$

ó

$$B \rightarrow b$$

En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aE \\ E &\rightarrow A \\ E &\rightarrow B \\ A &\rightarrow aA \\ A &\rightarrow b \\ B &\rightarrow bB \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

En forma más compacta, si ”—”=”$\vee$”:

1. $S \rightarrow aE$
2. $E \rightarrow A \mid B$
3. $A \rightarrow aA \mid b$
4. $B \rightarrow bB \mid b$

las anteriores se consideran **reglas de substitución** para la generación de cadenas.

Por ejemplo: tomemos S:

$$S$$

la substituimos por aE:

$$aE$$

luego substituimos A por E (también pudimos haber substituido E por B):

$$aA$$

luego substituimos A por aA:

$$aaA$$

y luego A por b:

$$aab$$

Todo este proceso de substituciones se puede abreviar como

$$\begin{aligned} S &\overset{(1)}{\Rightarrow} aE \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} aA \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} aaA \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} aab \end{aligned}$$

El símbolo "$\Rightarrow$" se lee "deriva".

También la cadena a^3b se puede generar como

$$\begin{aligned} S &\overset{(2)}{\Rightarrow} aE \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} aA \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} aaA \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} aaaA \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} aaab \end{aligned}$$

Definición

Si $w \in \Sigma^*$, se usa $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ para indicar que w se generó a partir de S en cero o más etapas.

Ejemplo

$S \overset{*}{\Rightarrow} a^2b$, $S \overset{*}{\Rightarrow} a^3b$.