Lema de Arden

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ *un AFN con estado inicial* $s = q_0$. *Sea* $q_i \in Q$. *Se define*

$$A_i = \{w \in \Sigma^* \mid \Delta(q_i, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

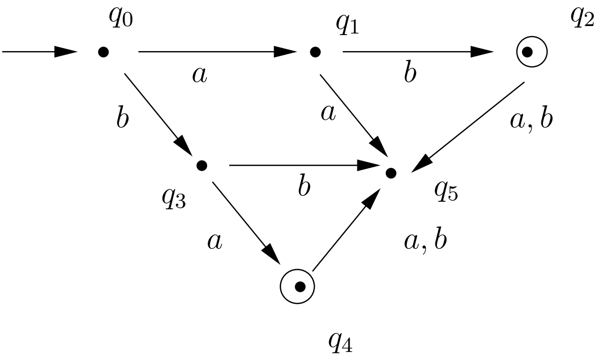
i.e., A_i *es el conjunto de cadenas que desde* q_i *llegan a un estado de aceptación. El conjunto* A_i *se llama* **cadenas aceptadas por el estado** q_i.

Notemos que

- $A_0 = L(M)$
- Si $q_i \in F$, entonces $\varnothing \in A_i$.

Ejemplo

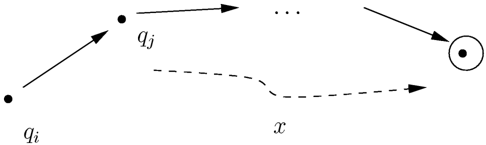
En el AFN siguiente



tenemos que

$$A_5 = \varnothing, \quad A_4 = \{\epsilon\}, \quad A_3 = \{a\}$$
$$A_2 = \{\epsilon\}, \quad A_1 = \{b\}, \quad A_0 = \{ba, ab\}.$$

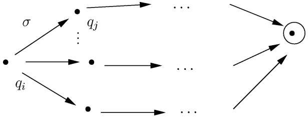
Si $q_j \in \Delta(q_i, \sigma)$ entonces $\sigma A_j \subset A_i$, pues, si $w \in \sigma A_j$ entonces $w = \sigma x$ para algún $x \in A_j$, esto es $\Delta(q_j, x) \cap F \neq \varnothing$. Luego



$$
\begin{aligned}
\Delta(q_i, w) \cap F &= \Delta(\Delta(q_i, \sigma), x) \cap F \\
&\supseteq \Delta(q_j, x) \cap F \\
&\neq \varnothing
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$A_i = \bigcup_{\sigma} \{\sigma A_j \mid q_j \in \Delta(q_i, \sigma)\} \tag{1}$$



Ejemplo

En el AFN del ejemplo anterior 1, usando la ecuación (1)

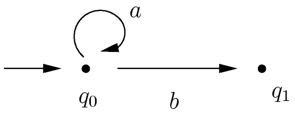
$$A_0 = aA_1 \cup bA_3, \quad A_1 = bA_2 \cup aA_5, \quad A_3 = aA_4 \cup bA_5$$
$$A_2 = aA_5 \cup bA_5 \cup \epsilon, \quad A_4 = \epsilon \cup aA_5 \cup bA_5$$
$$A_5 = \varnothing$$

este es un sistema de ecuaciones que se puede resolver por sustitución regresiva:

$$A_4 = \epsilon, \quad A_3 = a, \quad A_2 = \epsilon, \quad A_1 = b$$
$$L(M) = A_0 = ab \cup ba$$

es decir, hemos calculado $L(M) = ab \cup ba$.

A veces, resultan ecuaciones autorecursivas. Por ejemplo, en



resulta, usando de nuevo la ecuación (1),

$$A_0 = aA_0 \cup bA_1, \quad A_1 = \epsilon$$
$$A_0 = aA_0 \cup b$$

para resolver tales ecuaciones autorecursivas se usa el lema de Arden.

Lema (de Arden)

Una ecuación de la forma

$$X = AX \cup B \tag{2}$$

donde $\epsilon \notin A$ *tiene como solución única a*

$$X = A^* B$$

Dem.

1. Primero notemos que $X = A^*B$ es solución de (2), pues

$$\begin{aligned} A^*B &= (A^+ \cup \epsilon)B \\ &= A^+B \cup B \\ &= AA^*B \cup B \\ &= A(A^*B) \cup B \end{aligned}$$

2. Ahora supongamos que hay otra solución a (2) y llamémosla Y. Esto es

$$Y = AY \cup B$$

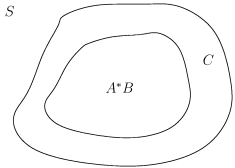
   con $X = A^*B \neq Y$. Entonces

$$\begin{aligned} X \cup Y &= AX \cup B \cup AY \cup B \\ &= A(X \cup Y) \cup B \end{aligned}$$

esto es $S = X \cup Y$ es también solución y es más grande que X, pues $X \subset S$. Podemos escribir

$$S = A^*B \cup C$$

donde $C = S - A^*B \neq \varnothing$ y $A^*B \cap C = \varnothing$.



Luego, como S es solución.

$$S = AS \cup B$$

y

$$\begin{aligned} A^* \cup C &= AA^*B \cup AC \cup B \\ &= A^+B \cup AC \cup B \\ &= (A^+ \cup \epsilon)B \cup AC \\ &= A^*B \cup AC \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}(A^*B \cup C) \cap C &= (A^*B \cup AC) \cap C \\ &= (A^*B \cap C) \cup (AC \cap C) \\ &= \varnothing \cup AC \cup C\end{aligned}$$

y entonces

$$C = AC \cap C \subseteq AC$$

es decir

$$C \subseteq AC$$

Sea $w \in C$ tal que $|w|$ es mínima; entonces $w = aw_0$ con $a \in A$ y $|a| > 0$ pues $\epsilon \notin A$. Luego

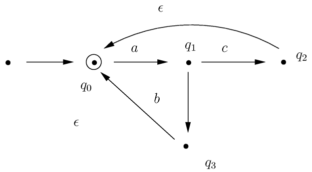
$$|w| = |a| + |w_0| > |w_0|$$

$$|w| > |w_0|$$

lo cual es imposible, pues $|w|$ es mínima.
Por lo tanto $X = A^*B$ es la solución única.

Ejemplo

Consideremos M como



entonces

$$A_0 = aA_0 \cup bA_1$$
$$A_1 = \epsilon$$
$$A_0 = aA_0 \cup b$$

y como $\epsilon \notin \{a\}$, entonces $A_0 = a^*b$. Es decir

$$L(M) = a^*b.$$