Operaciones

Definición

Si w es una cadena sobre el alfabeto Σ, su **longitud** *se denota con $|w|$.*

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ y $w = 121$. Entonces $|w| = 3$. Además $|\epsilon| = 0$.

Definición

La **concatenación de palabras** *es una operación "$\cdot$":*

$$\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$
$$(w, z) \mapsto w \cdot z = wz$$

Ejemplo

Si $w = aba$ y $z = bad$ entonces $w \cdot z = ababad$.

Es común omitir el símbolo de la operación de concatenación. Por ejemplo, en el anterior,

$$wz = ababad$$

Notemos las siguientes propiedades generales

1. Si w, z son palabras entonces $|wz| = |w| + |z|$.
2. Si $w \in \Sigma^*$, entonces
   2.1 $\epsilon w = w$
   2.2 $w\epsilon = w$
3. En general $wz \neq zw$.

Definición (potencia)

Si $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \Sigma^*$, se define

$$w^n = \begin{cases} \epsilon & si\ n = 0 \\ ww^{n-1} & si\ n > 0 \end{cases}$$

*llamada la n-**ésima potencia** de w.*

Ejemplo

Si $w = 122$ entonces

$$w^0 = \epsilon$$
$$w^1 = ww^0 = 122\epsilon = 122$$
$$w^2 = ww^1 = 122122$$
$$w^3 = ww^2 = 122122122$$

La igualdad entre palabras se podría definir como: si $w, z \in \Sigma^*$, se pone $w = z$ en caso de que $|w| = |z|$ y de que tengan los mismos símbolos en la misma posición.

Definición

Sean $w, x \in \Sigma^*$.

1. *Se dice que x es* **prefijo** *de w si $\exists y \in \Sigma^*$ tal que*

$$w = xy$$

2. *Se dice que x es* **prefijo propio** *de w si x es prefijo de w, pero $w \neq x$.*

Ejemplo

Sea $w = 121$. *Entonces*

1. $x = 1$ *es prefijo (propio) de* w;
2. $u = 12$ *es prefijo (propio) de* w;
3. $w = 121$ *es prefijo de* w, *pues* $w = w\epsilon$, *pero no es propio.*

Definición

Una cadena $w \in \Sigma^*$ es subpalabra de $z \in \Sigma^*$ si $\exists x, y \in \Sigma^*$ tales que

$$z = xwy$$

Ejemplo

1. *Si $w \in \Sigma^*$ entonces w es subpalabra de la misma w, pues*

$$w = \epsilon w \epsilon$$

2. *$w = 2$ es subpalabra de $z = 121$; a su vez $y = 12$ es subpalabra de z, pues $z = \epsilon y 1$.*

El siguiente concepto será útil para definir nuevos lenguajes.

Definición

Si $w \in \Sigma^*$*, la* **inversa o transpuesta** *de* w *es la imagen reflejada de* w *que se denota* w^I*. Esto es:*

$$w^I = \begin{cases} w & si\ w = \epsilon \\ y^I a & si\ w = ax\ con\ a \in \Sigma\ y\ y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Ejemplo

Si $w = ecos$, entonces

$$
\begin{aligned}
w^I &= (cos)^I e \\
&= (os)^I ce \\
&= s^I oce \\
&= (s\epsilon)^I oce \\
&= \epsilon^I soce \\
&= \epsilon soce \\
&= soce
\end{aligned}
$$

Propiedad

Si $w, y \in \Sigma^*$, *entonces*

$$(wy)^I = y^I w^I$$

Dem. Por inducción sobre $n = |w|$. Si $n = 0$, entonces $w = \epsilon$, luego

$$\begin{aligned}(wy)^I &= (\epsilon y)^I \\ &= y^I\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}w^I y^I &= \epsilon y^I, && \text{por definición,} \\ &= y^I\end{aligned}$$

por lo tanto $(wy)^I = w^I y^I$.

Supongamos cierto el resultado para palabras w_0 de longitud n: esto es

$$(w_0 y)^I = y^I w_0^I \tag{1}$$

Ahora tomemos una palabra w de longitud $|w| = n + 1$. Entonces $w = az$ con $a \in \Sigma$ y $z \in \Sigma^*$ con $|z| = n$. Luego

$$\begin{aligned}
(wy)^I &= (azy)^I \\
&= (zy)^I a, && \text{por definición de inversa,} \\
&= y^I z^I a, && \text{por hipótesis de inducción,} \\
&= y^I (az)^I, && \text{por definición de inversa} \\
&= y^I w^I \quad .
\end{aligned}$$