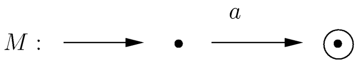
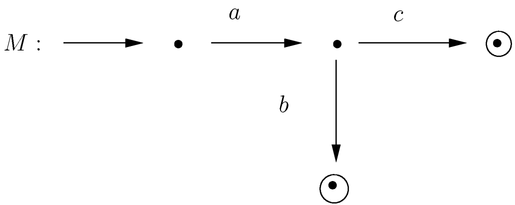
La siguiente operación que se usa para la construcción de los lenguajes regulares es la cerradure de Kleene. También existe una construcción similar para autómatas.

Ejemplo

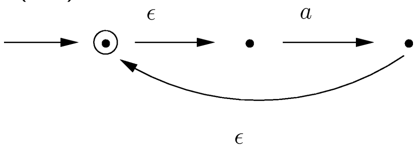
En cada inciso considere $L(M)$ y construya M_1 un AFN tal que $L(M_1) = L(M)^*$.

1. 

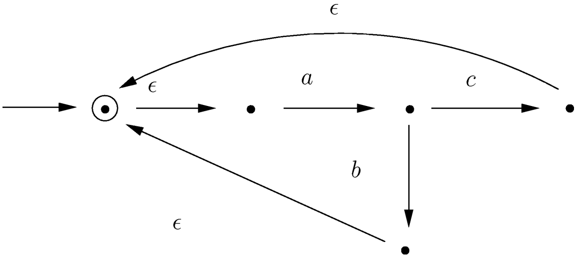
2. 

Sol.

1. Tenemos que $L(M) = \{a\}$. Por lo que tenemos que construir M_1 tal que $L(M_1) = a^*$. Tal M_1 es:



2. Tenemos que $L(M) = \{ab, ac\}$. Queremos M_1 un AFN tal que $L(M_1) = (ab \cup ac)^*$. Tal es



El ejemplo anterior ilustra el algoritmo subyacente en la demostración del siguiente teorema.

Teorema

Si $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ *es un AFN, entonces existe* $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, F_1, \Delta_1)$ *tal que* $L(M_1) = L(M)^*$.

Dem.

Se le añade un nuevo estado a M:

$Q_1 = Q \cup \{s_1\}$ con $s_1 \notin Q_1$

$\Sigma_1 = \Sigma$

s_1

$F_1 = \{s_1\}$

Δ se le añaden ϵ-transiciones de los estados finales a s_0:

Si $\sigma \in \Sigma_1$, $q \in Q_1$:

$$\Delta_1(q,\sigma) = \begin{cases} \Delta(q,\sigma) & \text{si } q \in Q \\ \varnothing & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$\Delta(q,\epsilon) = \begin{cases} \{s_1\} & \text{si } q \in F \\ \{s\} & \text{si } q = s_1 \\ \varnothing & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que demostrar que

$$w \in L(M_1) \Leftrightarrow w \in L(M)^*.$$

Hemos demostrado:

Teorema

Los lenguajes aceptados por los automatas finitos contienen a

1. $\varnothing$, $\{\epsilon\}$, *los lenguajes unitarios* $\{a\}$, $\forall a \in \Sigma$.
2. *Además tales elnguajes son cerrados con respecto a la unión, concatenación y cerradura de Kleene.*

Corolario

Si r es una expresión regular entonces existe M un autómata finito tal que $r = L(M)$.

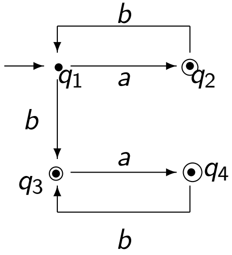
Proof.

Las expresiones regulares se contruyen a partir de $\varnothing$, $\{\epsilon\}$ y los lenguajes unitarios $\{\sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$ con cerrauras uniones y concatenaciones; y para tales construcciones existen autómatas que las aceptan. $\square$

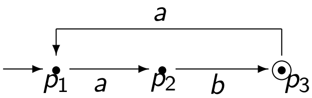
Tarea

1. *Obtener un AFN que acepte* ϵ.
2. *Obtener un AFN que acepte* $\{a\}$. *Obtener otro AFN que acepte* $\{b\}$. *Usar las técnicas vistas para unir éstos AFN en uno que acepte el lenguaje* $\{a, b\}$.
3. *Obtener un AFN que acepte* $(a \cup b)^* \cup (aba)^+$.
4. *Obtener un AFN que acepte todas las cadenas de la forma* bow, $bowwowwow$, $bowwowwowwowwow, \ldots$. *Conseguir un AFN que acepte todas las cadenas de la forma* $ohmy$, $ohmyohmy$, $ohmyohmyohmy, \ldots$. *Unir los dos AFN para que se acepte la unión de los dos lenguajes. Téngase en cuenta que los símbolos de un alfabeto no tiene por qué ser caracteres de longitud uno.*

5. Sea M_1 dado por



y M_2 dado por



Obtener un AFN que acepte $L(M_1)L(M_2)$. Obtener un AFN que acepte $L(M_2)L(M_1)$.

6. Sean $M_1 = (\{q_1, q_2, q_3\}, a, b, q_1, \{q_1\}, \Delta_1)$ y $M_2 = (\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{0, 1\}, p_1, \{p_1, p_2\}, \Delta_2)$, donde Δ_1 y Δ_2 viene dados por las tablas siguientes:

Δ_1	a	b
q_1	$\{q_2, q_3\}$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

Δ_2	0	1
p_1	$\{p_2\}$	$\{p_3, p_4\}$
p_2	$\varnothing$	$\{p_3, p_4\}$
p_3	$\{p_2\}$	$\varnothing$
p_4	$\{p_3\}$	$\varnothing$

Obtener un AFN que acepte $L(M_1)L(M_2)$. Obtener un AFN que acepte $L(M_2)L(M_1)L(M_1)$. Obtener finalmente, un AFN que acepte $L(M_1)^2 \cup L(M_1)$.

7. Obtener una AFN para $(ab)^*$ a partir de los AFN que aceptan $\{a\}$ y $\{b\}$.

8. Obtener un AFN para $(aa \cup b)^*(bb \cup a)^*$ a partir de los AFN que aceptan $\{a\}$ y $\{b\}$.

9. Obtener un AFN para

$$((a \cup b)(a \cup b))^* \cup ((a \cup b)(a \cup b)(a \cup b))^*$$

a partir de los AFN para $\{a\}$ y $\{b\}$.

10. Si $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ es un autómata finito determinista, entonces el complemento de $L(M)$ [es decir $\Sigma^* - L(M)$] es aceptado por el autómata $M' = (Q, \Sigma, s, Q - F, \delta)$. ¿Es M' un AFD o un AFN? Obtener un AFD que acepte ab^*ab. Obtener un autómata finito que acepte $\{a, b\}^* - ab^*ab$.