Teorema

Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, F_1, \Delta_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, F_2, \Delta_2)$ *dos AFN. Entonces existe* M *un AFN tal que*

$$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2).$$

Dem.

Se construirá M como un AFN con ϵ-transiciones. Sea

$$M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$$

donde

$$\begin{aligned}
Q &= Q_1 \dot\cup Q_2 \cup \{s\}, \text{ con } s \notin Q_1 \cup Q_2 \\
\Sigma &= \Sigma_{\cup} \Sigma_1 \\
s & \\
F_0 &= F_1 \dot\cup F_2 \\
\Delta &= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s_0, \epsilon, s_2)\}
\end{aligned}$$

es decir, Δ se define como: si $\sigma \in \Sigma$,

$$\Delta(q, \sigma) = \begin{cases} \Delta_1(q, \sigma), & \text{si } q \in Q_1 \\ \Delta_2(q, \sigma), & \text{si } q \in Q_2 \end{cases}$$

$$\Delta(s, \sigma) = \varnothing, \quad \Delta(s, \epsilon) = \{s_1, s_2\}.$$

Tenemos que probar que

$$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2).$$

Sea $w \in \Sigma^*$ tal que $w \in L(M)$, entonces $\Delta(s, w) \cap F \neq \varnothing$ lo que implica que

$$\Delta(s, w) \cap F_1 \neq \varnothing \text{ ó } \Delta(s, w) \cap F_2 \neq \varnothing.$$

Si $\Delta(s, w) \cap F_1 \neq \varnothing$ entonces

$$\begin{aligned}
\varnothing \neq \Delta(s, w) \cap F_1 \\
&= \Delta(s, \epsilon w) \cap F_1 \\
&= \Delta(\Delta(s, \epsilon), w) \cap F_1 \\
&= \Delta(s_1, w) \cap F_1 \\
&= \Delta_1(s_1, w) \cap F_1
\end{aligned}$$

lo que implica que $w \in L(M_1)$.

Similarmente, si $\Delta(s, w) \cap F_2 \neq \varnothing$ entonces $w \in L(M_2)$. En cualquier caso:

$$w \in L(M_1) \cup L(M_2).$$

Recíprocamente, $L(M_1) \subseteq L(M)$ pues si $w \in L(M_1)$ entonces

$$\begin{aligned}
\varnothing &\neq \Delta_1(s_1, w) \cap F_1 \\
&= \Delta(s_1, w) \cap F_1 \\
&= \Delta(\Delta(s, \epsilon), w) \cap F_1 \\
&= \Delta(s, \epsilon w) \cap F_1 \\
&= \Delta(s, w) \cap F_1 \\
&\subseteq \Delta(s, w) \cap F
\end{aligned}$$

así, $\Delta(s, w) \cap F \neq \varnothing$, lo que implica $w \in L(M)$.

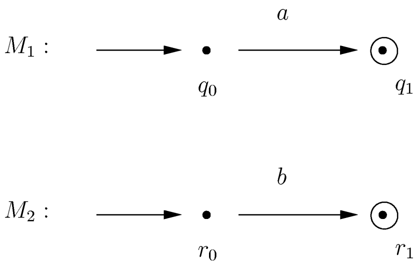
Similarmente $L(M_2) \subseteq L(M)$; y por tanto

$$L(M_1) \cup L(M_2) \subseteq L(M).$$

Una operación que aparece para la construcción de lenguajes regulares es la unión. Para la cual existe un algoritmo correspondiente a autómatas. La siguiente operación que aperece con los lenguajes regulares es la concatenación. También existe un algoritmo correspondiente en autómatas.

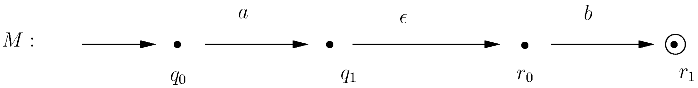
Ejemplo

Sean



tenemos que $L(M_1) = \{a\}$ y $L(M_2) = \{b\}$. Encontrar M un AFN tal que $L(M) = L(M_1)L(M_2)$.

Sol.



$$L(M) = \{ab\} = \{a\}\{b\}.$$

Teorema

Si $M_i = (Q_i, \Sigma_i, s_i, F_i, \Delta_i)$, $i = 1, 2$ *son dos AFN, entonces existe un* M *AFN tal que*

$$L(M) = L(M_1)L(M_2)$$

Dem.

Se define $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ donde

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_1 \dot{\cup} Q_2 \\
\Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\
s &= s_1 \\
F &= F_2 \\
\Delta &= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup (F_1 \times \{\epsilon\} \times \{s_1\})
\end{aligned}
$$

es decir, si $\sigma \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $q \in Q_1 \cup Q_2$,

$$
\Delta(q, \sigma) = \begin{cases} \Delta_1(q, \sigma) & \text{si } q \in Q_1 \text{ y } \sigma \in \Sigma_1 \\ \Delta_2(q, \sigma) & \text{si } q \in Q_2 \text{ y } \sigma \in \Sigma_2 \\ \varnothing & \text{otro caso.} \end{cases}
$$

$$
\Delta(q, \epsilon) = \begin{cases} \{s_2\} & \text{si } q \in F_1 \\ \varnothing & \text{si } q \notin F_2. \end{cases}
$$

Por demostrar que

$$L(M) = L(M_1)L(M_2)$$

es decir, que para $w \in \Sigma^*$,

$$w \in L(M) \Leftrightarrow w \in L(M_1)L(M_2).$$

($\Leftarrow$) Si $w \in L(M_1)L(M_2)$ entonces $w = xy$ con $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$; en particular $x \in \Sigma_1^*$ y $y \in \Sigma_2^*$. Podemos escribir

$$w = x\epsilon y$$

luego

$$\Delta(s, w) = \Delta(\Delta(\Delta(s, x), \epsilon), y). \qquad (1)$$

Como $x \in \Sigma_1^*$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta(s, x) &= \Delta(s_1, x) \\ &= \Delta_1(s_1, x) \end{aligned}$$

y como $x \in L(M_1)$ entonces $\Delta(s_1, x) \cap F_1 \neq \varnothing$, por lo que

$$\Delta_1(s_1, x) = \{\ldots, \underbrace{q}_{\in F_1}, \ldots\}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta(s,x),\epsilon) &= \Delta(\{\ldots,q,\ldots\},\epsilon)\\ &= \Delta(\underbrace{q}_{\in F_1},\epsilon)\\ &= \{s_2\}\end{aligned}$$

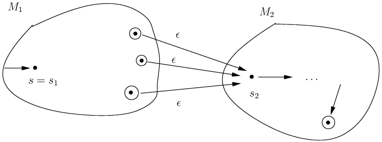


Figure: M

Usando la ecuación (1),

$$\Delta(s,w) = \Delta(s_2,y)$$
$$= \Delta(s_2,y)$$

pues $y \in \Sigma_2^*$. Pero $\Delta_2(s_2,y) \cap F_2 \neq \varnothing$, luego

$$\Delta(s,w) \cap F = \Delta(s,w) \cap F_2 \neq \varnothing$$

lo que implica que

$$w \in L(M).$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $w \in L(M)$ entonces

$$\underbrace{\Delta(s,w)}_{\Delta(s_1,w)} \cap F \neq \varnothing$$

es decir, las transiciones indicadas por w deben de pasar del estado s_1 en M_1 a un estado de aceptación en M_2: la única forma de pasar de M_1 a M_2 es usando las ϵ-transiciones que ligan a los estados finales de M_1 con el inicial de M_1 (ver figura 1). Por lo que w debe primero de transitar hacia los estados de F_1 y luego hacia F_2. Esto es

$$w = xy$$

con $\Delta_1(s_1, x) \cap F_1 \neq \varnothing$ y $\Delta_2(s_2, y) \cap F_2 \neq \varnothing$. Es decir $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Por lo tanto $w = xy \in L(M_1)L(M_2)$.