El precio a pagar por permitir tales ϵ-transiciones es la indefinición de los estados siguientes. Por ejemplo, en los cáculos anteriores obtuvimos que $\Delta(q_0, a^2) = \{q_1\}$ y también que $\Delta(q_0, a^2) = \varnothing$. ¿Cuáles son entonces los estados siguientes? Se puede resolver tal indefinición si se definen los estados siguientes de manera más cuidadosa.

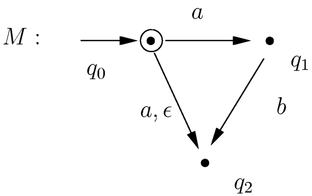
Definición

Un **AFN con ϵ-transiciones** M *es* $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ *donde*

1. Q *es un conjunto finito (de estados).*
2. $s \in Q$ *estado inicial*
3. $F \subseteq Q$ *estados de aceptación*
4. Δ *es una relación de* $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\})$ *en* Q.

Ejemplo

Sea el autómata

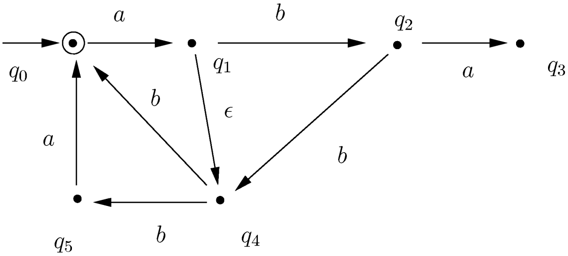


M es un AFN con ϵ-transiciones. Nótese que se puede transitar del estado q_2 a q_0 sin consumir ninguna letra del alfabeto, por lo que ab es aceptada por M. Aún más, los estados siguientes a q_0 con entrada ab deben de ser $\{q_0, q_2\}$.

Se puede poner Δ en una tabla:

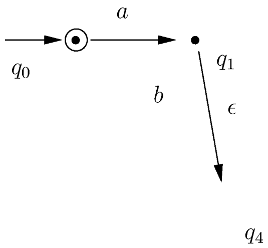
Δ	a	b	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$
q_2	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_0\}$

Para obtener los estados siguientes a un estado dado se deben de tener en cuenta a los estados siguientes de las ϵ-transiciones. Por ejemplo

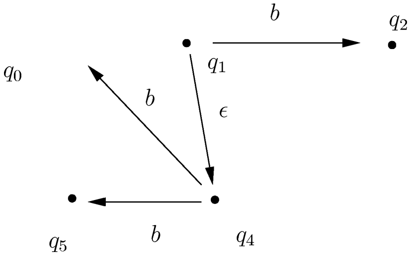


Los estados siguientes a q_0 con entrada a son

$$\{q_1, q_4\}$$



mientras que los estados siguentes a q_1 con entrada b son $\{q_2, q_0, q_5\}$



En general, se pueden calcular los estados siguientes con lo siguiente:

Definición

*Sea q un estado. La ϵ-**cerradura** de q es*
$(\epsilon - c)(q) =$
$\{p \mid p \textit{ es accesible desde } q \textit{ sin consumir ningún símbolo de } \Sigma \textit{ en la entrada}\}$
Si $q_{i_1}, \ldots q_{i_n}$ son estados se define

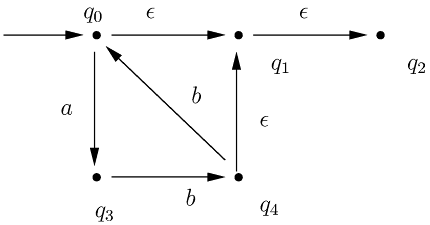
$$(\epsilon - c)\{q_{i_1}, \ldots q_{i_n}\} = \bigcup_{k=1}^{n} (\epsilon - c)(q_{i_k})$$

Por definición, todo estado es accesible desde sí mismo sin consumir ningún símbolo de entrada. Esto es,

$$\forall q \in Q, q \in (\epsilon - c)(q)$$

Ejemplo

En el autómata



entonces

$$(\epsilon - c)(q_3) = \{q_3\}$$

$$(\epsilon - c)(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad (\epsilon - c)(q_4) = \{q_4, q_1, q_2\}$$

Definición

Sea q un estado y $\sigma \in \Sigma$. Se definen los **estados que siguen directamente a q pasando por** σ *como el conjunto*

$$d(q, \sigma) = \{p \in Q \mid \exists \text{ una transición de } q \text{ a } p \text{ etiquetada por } \sigma\}$$

y si $q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$ son varios estados, se define

$$d(\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\}, \sigma) = \bigcup_{j=1}^{k} d(q_{i_j}, \sigma)$$

Ejemplo

En el AFN del ejemplo inmediato anterior tenemos que

$$d(q_0, a) = \{q_3\}, \quad d(\{q_3, q_4\}, b) = d(q_3, b) \cup d(q_4, b) = \{q_4, q_0\}$$
$$d(q_0, b) = \varnothing$$

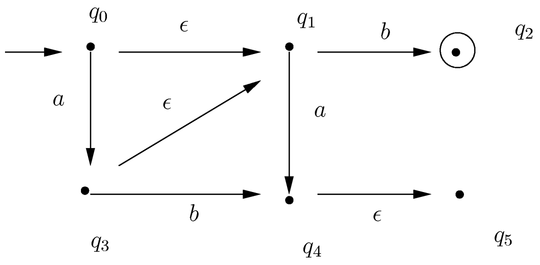
Notemos que

- $(\epsilon - c)(d(q, \sigma))$ son los estados accesibles desde q tomando primero una transición sobre σ y luego tomando una o más ϵ-transiciones.
- $d((\epsilon - c)(q), \sigma)$ son los estados accesibles desde q tomando una o más ϵ-transiciones y luego una transición sobre σ.
- $(\epsilon - c)(d((\epsilon - c)(q), \sigma))$ son los estados accesibles desde q primero tamando una o más ϵ-transiciones luego siguiendo con una transción σ y luego tomando una o más ϵ-transiciones. Así:

  $(\epsilon - c)(d((\epsilon - c)(q), \sigma))$ *son los estados siguientes a* q *con entrada* σ.

Ejemplo

Para calcular los estados siguientes a q_0 con entrada a,



primero calculamos su ϵ-cerradura:

$$(\epsilon - c)(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

enseguida los estados que siguen directamente pasando por a

$$d((\epsilon - c)(q_0), a) = d(q_0, a) \cup d(q_1, a) = \{q_3, q_4\}$$

y finalmente la ϵ-cerradura de éstos:

$$\begin{aligned}(\epsilon - c)(d((\epsilon - c)(q_0), a)) &= (\epsilon - c)(q_3) \cup (\epsilon - c)(q_4) \\ &= \{q_3, q_1\} \cup \{q_4, q_4\} \\ &= \{q_1, q_3, q_4, q_5\}\end{aligned}$$