La definición formal de las palabras aceptadas es:

Definición

$w \in \Sigma^*$ es **aceptada** *si $\Delta(s, w)$ contiene al menos un estado de aceptación, i.e., si*

$$\Delta(s, w) \cap F \neq \varnothing \ .$$

Definición

Sea M un AFN. El **lenguaje aceptado por** *M es*

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ es aceptada por } M\}$$

Las transiciones de estados pueden describirse de forma similar a los AFD con δ.

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ un AFN.

1. *Si $X \subseteq Q$ y $\sigma \in Q$ se define*

$$\Delta(X,\sigma) = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } X = \varnothing \\ \bigcup_{q\in X} \Delta(q,\sigma), & \text{si } X \neq \varnothing \end{cases}$$

2. *Si $w \in \Sigma^*$ con $w = \sigma w'$ con $\sigma \in \Sigma$ y $|w'| > 0$ entonces*

$$\Delta(q,w) = \Delta(\Delta(q,\sigma), w')$$

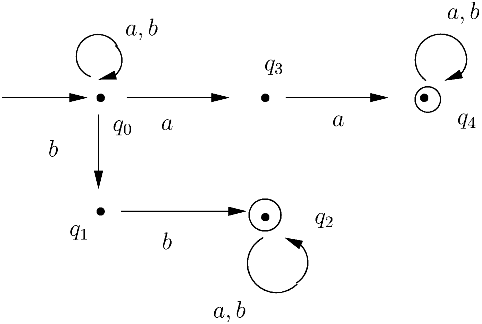
Ejemplo

Si $\Sigma = \{a, b\}$;

$$\begin{aligned}\Delta(q_0, abaab) &= \Delta(\Delta(q_0, a), baab) \\ &= \Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(q_0, a), b), a), a), b)\end{aligned}$$

Ejemplo

Consideremos M el AFN con alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ y diagrama de transición



entonces

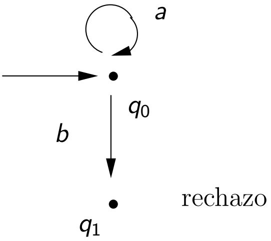
Δ	a	b
q_0	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_4\}$	$\varnothing$
q_3	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

y así,

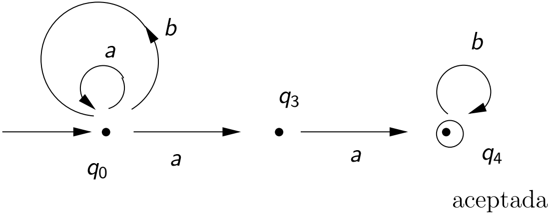
$$\begin{aligned}\Delta(q_0, ab) &= \Delta(\Delta(q_0, a), b)\\ &= \Delta(\{q_0, q_3\}, b)\\ &= \Delta(q_0, b) \cup \Delta(q_3, b)\\ &= \{q_0, q_3\} \cup \varnothing\\ &= \{q_0, q_3\}\end{aligned}$$

que son los posibles estados que se obtienen a partir de q_0 con transición ab.

Examinemos la palabra *abaab*:



por lo que *abaab aún* no se acepta. Pero



lo que nos lleva a un estado de aceptación. De aquí que *abaab* se acepta, i.e.,

$$abaab \in L(M)$$

Estos diagramas realmente corresponden a las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\Delta(q_0, abaab) &= \Delta(\Delta(q_0, a), baab) \\
&= \Delta(\{q_0, q_3\}, baab) \\
&= \Delta(q_0, baab) \cup \Delta(q_3, baab) \\
&= \Delta(\Delta(q_0, b), aab) \cup \Delta(\Delta(q_3, b), aab) \\
&= \Delta(\{q_0, q_1\}, aab) \cup \underbrace{\Delta(\varnothing, aab)}_{\varnothing} \\
&= \Delta(q_0, aab) \cup \Delta(q_1, aab) \\
&= \Delta(\Delta(q_0, a), ab) \cup \Delta(\Delta(q_1, a), ab) \\
&= \Delta(\{q_0, q_3\}, ab) \cup \Delta(\varnothing, ab) \\
&= \Delta(q_0, ab) \cup \Delta(q_3, ab) \\
&= \Delta(\Delta(q_0, a), b) \cup \Delta(\Delta(q_3, a), b) \\
&= \Delta(\{q_0, q_3\}, b) \cup \Delta(q_4, b) \\
&= \{q_0, q_1\} \cup \varnothing \cup \{q_4\} \\
&= \{q_0, q_1, q_4\}
\end{aligned}
$$

que contiene al estado de aceptación $q_4 \in F$, por lo que, como antes observamos, $abaab \in L(M)$.

Equivalencia entre AFD y AFN

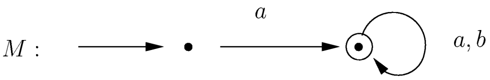
Lo que realmente importa de los autómatas no es su diagrama de transición, sino el lenguaje que aceptan.

Definición

Sea M un AFD ó AFN, sea M' un AFD ó AFN. Se dice que M es **equivalente** *a M' si $L(M) = L(M')$*

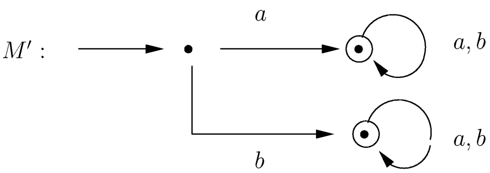
Ejemplo

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Sea M el autómata finito no determinista



es fácil ver que $L(M) = a(a \cup b)^*$.

Ahora considermos M' el siguiente autómata finito determinista



También tenemos que $L(M') = a(a \cup b)^*$. Por lo tanto M es equivalente a M'.

En general, si M es un AFD, entonces es un AFN, pues δ función es en particular una relación. Queremos probar lo recíproco; esto es, si M es un AFN entonces existe M' un AFD equivalente a M. La idea es la siguiente: como Δ es una relación, entonces

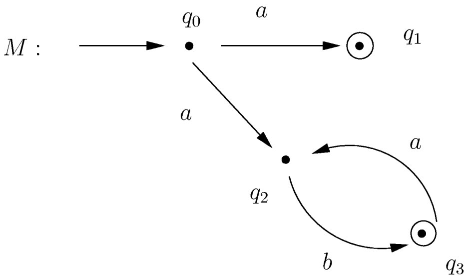
$$\Delta(q,\sigma) = \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_s}\}$$

esto es, Δ induce una función, no de estados a estados, sino de conjuntos de estados a conjuntos de estados:

$$\Delta' : E \times \Sigma \to E, \quad E \subseteq 2^Q$$

Ejemplo

Sea M el AFN

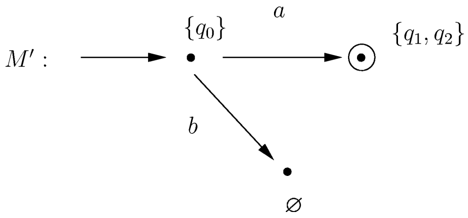


Tenemos que $L(M) = a \cup (ab)^+$.

Construiremos un AFD M' tal que $L(M') = a \cup (ab)^+$. Resulta que

Δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_2\}$	$\varnothing$

La primera fila de esta tabla sugiere

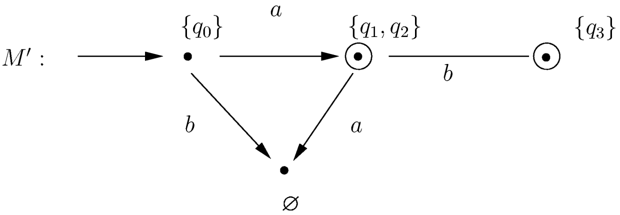


donde hay nuevos estados marcados por $\{q_0\}$, $\{q_1, q_2\}$ y $\varnothing$. Necesitamos calcular las transiciones de estos nuevos estados. Las del estado $\{q_1, q_2\}$ son

$$\begin{aligned}\Delta(\{q_1, q_2\}, a) &= \Delta(q_1, a) \cup \Delta(q_2, b)\\ &= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\{q_1, q_2\}, b) &= \Delta(q_1, b) \cup \Delta(q_2, b)\\ &= \varnothing \cup \{q_3\} = \{q_3\}\end{aligned}$$

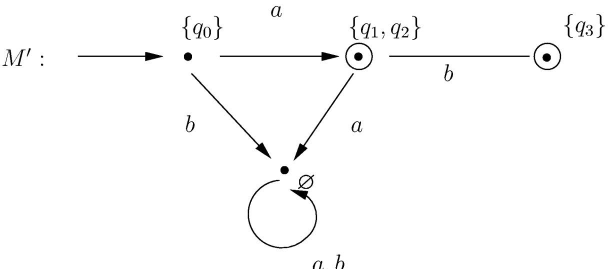
Agregamos tal información en el nuevo diagrama de transición:



Las transiciones desde $\varnothing$ son hacia $\varnothing$:

$$\Delta(\varnothing, a) = \varnothing, \quad \Delta(\varnothing, b) = \varnothing \ .$$

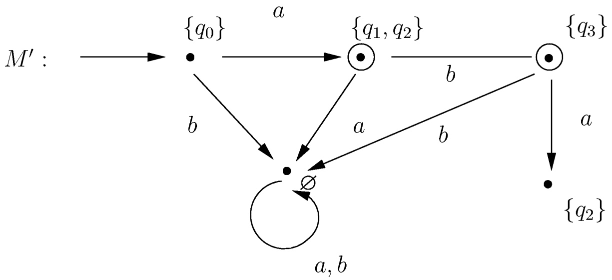
De nuevo, actualizamos el diagrama de transición:



Ahora necesitamos calcular las transiciones del nuevo estado $\{q_3\}$:

$$\Delta(\{q,3\}, a) = \{q_2\}, \quad \Delta(q_3, b) = \{q_3\}$$

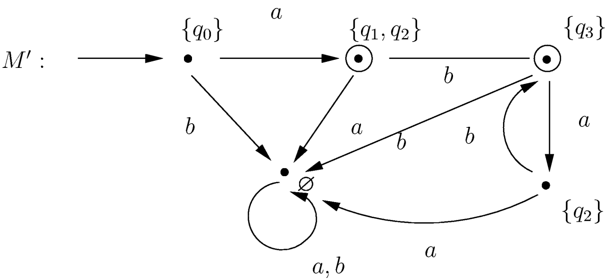
queda ahora el diagrama



Finalmente, necesitamos las transiciones del nuevo estado $\{q_2\}$:

$$\Delta(\{q_2\}, a) = \emptyset, \quad \Delta(\{q_2\}, b) = \{q_3\}$$

lo que completa la construcción de M' que es un AFD:



el cual acepta el lenguaje

$$L(M') = a \cup b \cup (ab)^+ \quad .$$

Nótese que los nuevos estados iniciales on aquellos que contienen a estados inicales del autómata original.