Definición

Sea $A \neq \varnothing$. Una relación R sobre A se dice que es de **equivalencia** *si es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Ejemplo

Sea R la relación en $\mathbb{Z}$ dada por

$$aRb \Leftrightarrow a = b \vee a = -b.$$

Demostrar que es de equivalencia.

Dem.

1. R es reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, aRa pues $a = a$.
2. R es simétrica: si aRb entonces $a = b$ o $a = -b$, luego $b = a$ o $b = -a$ lo que implica bRa.
3. R transitiva: si aRb y bRc entonces $(a = b$ o $a = -b)$ y $(b = c$ o $b = -c)$ lo que implica $|a| = |b|$ y $|b| = |c|$ entonces $|a| = |c|$ de donde se sigue que $a = c$ o $a = -c$ por lo que aRc.

$\square$

Ejemplo

Sea R la relación de equivalencia en $\mathbb{Q}$ (conjunto de números racionales) dada por

$$aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

(ejemplos de parejas relacionadas son: $(1/2)R(1/2)$ pues $1/2 - 1/2 \in \mathbb{Z}$, $(3/2)R(1/2)$ pues $3/2 - 1/2 = 1 \in \mathbb{Z}$, $(1/2)R(3/2)$ pues $1/2 - 3/2 = -1 \in \mathbb{Z}$, etc.) Demostrar que R es de equivalencia.

Dem.

1. R es reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a - a = 0$ luego aRa.
2. R es simétrica: $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\forall b \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} aRb &\Rightarrow a - b \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \underbrace{-(a-b)}_{b-a} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow b - a \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow bRa \end{aligned}$$

3. R es transitiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\forall b \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} aRb \wedge bRc &\Rightarrow a - b \in \mathbb{Z} \wedge b - c \in \mathbb{Z} \\ &\underbrace{(a-b)+(b-c)}_{a-c} \in \mathbb{Z}, \text{pues suma de enteros es entero;} \\ &\Rightarrow a - c \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow aRc. \end{aligned}$$

Ejemplo

Se define la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = ka$$

El símbolo "|" se lee "divide". Esto es

$$a \text{ divide a } b \Leftrightarrow b \text{ es múltiplo de } a$$

Por ejemplo:

1. $3|6$ pues existe $2 \in \mathbb{Z}$ tal que $6 = 2 * 3$;
2. $7|21$ pues $\exists 3 \in \mathbb{Z}$ tal que $21 = 3 * 7$;
3. $5| - 50$ pues $\exists - 10 \in \mathbb{Z}, -50 = (-10) * 5$;
4. $37|0$ pues $\exists 0 \in \mathbb{Z}, 0 = 0 * 37$;
5. $3 \nmid 4$ pues no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $4 = k * 3$. De hecho tal k tiene que ser $k = 4/3 \notin \mathbb{Z}$.
6. $0|0$ pues $\exists 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = 1 * 0$.

Ejemplo

Como puede notarse, la relación de divisibilidad no es de equivalencia pues no es simétrica: $3|6$ *pero* $6 \nmid 3$. *Sin embargo es reflexiva y transitiva:*

1. *reflexiva:* $\forall a \in \mathbb{Z}$: *como* $a = 1 * a$ *entonces* $a|a$;
2. *transitiva:* $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a|b \wedge b|c &\Rightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{Z}, b = k_1 a) \wedge (\exists k_2 \in \mathbb{Z}, c = k_2 b) \\ &\Rightarrow c = k_2(k_1 a), sustituyendo\ b; \\ &\Rightarrow c = (k_2 k_1)a, asociando\ con\ k_2 k_1 \in \\ &\Rightarrow c\ es\ múltiplo\ de\ a \\ &\Rightarrow a|c \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \text{“}|\text{”}\ no\ es\ relación\ de\ equivalencia$$

Ejemplo

Se define la relación en $\mathbb{Z}$:

$$a \equiv b \Leftrightarrow 4|(a-b)$$

(por ejemplo $32 \equiv 8$ pues $4|(32-8) = 24$, $7 \equiv 3$ pues $4|(7-3) = 4$, $4 \equiv 0$ pues $4|(4-0)$, $4 \not\equiv 1$ pues $4 \nmid (4-1) = 3$).
¿Es $\equiv$ relación de equivalencia?

Sol. Si:

1. reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a$ pues $4|(a-a) = 0$.
2. simétrica:

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow 4|(a-b) \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a-b = 4k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -(a-b) = -4k \qquad \text{multiplicando por } -1 \\ &\Rightarrow \exists -k \in \mathbb{Z}, b-a = 4(-k) \\ &\Rightarrow 4|(b-a) \\ &\Rightarrow b \equiv a \end{aligned}$$

3. transitiva:

$$
\begin{aligned}
a \equiv b \wedge b \equiv c &\Rightarrow 4|(a-b) \wedge 4|(b-c) \\
&\Rightarrow a-b \text{ es múltiplo de 4 y } b-a \text{ es múltiplo de 4} \\
&\Rightarrow \underbrace{(a-b)+(b-c)}_{a-c} \text{ es múltiplo de 4}
\end{aligned}
$$

pues suma de múltiplos de 4 resulta en un múltiplo de 4.

Tarea

¿Cuáles de las siguientes relaciones en $\{0, 1, 2, 3\}$ son de equivalencia? ¿Qué propiedades faltan para que lo sean?

1. $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
2. $\{(0,0),(0,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
3. $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
4. $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$

Tarea

Lo mismo que el anterior para las siguientes relaciones entre el conjunto de personas.

1. $\{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ tienen la misma edad}\}$
2. $aRb \Leftrightarrow$ *a y b tienen los mismos padres.*
3. $aRb \Leftrightarrow$ *a y b tienen un padre en común.*
4. $aRb \Leftrightarrow$ *a y b hablan un mismo idioma.*

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Se define la relación de **congruencia módulo** n *en $\mathbb{Z}$ como*

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|(a-b)$$

Ejemplo

1. $5 \equiv 1 \pmod{4}$ pues $4|(5-1)$.
2. $21 \equiv 0 \pmod{7}$ pues $7|(21-0)$.
3. $28 \equiv 8 \pmod{5}$ pues $5|(28-8)$

Tarea

Demuestre que la relación de congruencia módulo n es de equivalencia.

Tarea

Determinanr el número de relaciones de equivalencia distintas que puede haber en un conjunto de tres elementos enumerándolas todas.

Tarea

Sea R la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Demostrar que R es de equivalencia.

Definición

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Si $a \in A$, la **clase de equivalencia de** *a es*

$$\bar{a} = [a] = \{x \in A \,|\, xRa\}$$

El elemento a se llama **representante** *de la clase de equivalencia.*

Ejemplo

Sea R la relación de equivancia en $\mathbb{Z}$ dada por $aRb \Leftrightarrow a = b$ o $a = -b$. Entonces

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, xR1\}$$

pero $xR1 \Leftrightarrow x = 1$ o $x = -1$. Así

$$[1] = \{1, -1\}$$
$$[2] = \{2, -2\}$$
$$[0] = \{0\}$$

Ejemplo

Consideremos la relación en $\mathbb{Z}$ de congruencia módulo 4:

$$a \equiv b \pmod 4 \Leftrightarrow 4|(a-b)$$

entonces

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv 0 \pmod 4\}$$

pero

$$\begin{aligned} x \equiv 0 \pmod 4 &\Leftrightarrow 4|(x-0) = x \\ &\Leftrightarrow x = 4k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} [0] =& \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ con } x = 4k\} \\ =& \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} \end{aligned}$$

Ejemplo

Similarmente

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv 1 \pmod 4\}$$

pero

$$\begin{aligned} x \equiv 1 \pmod 4 &\Leftrightarrow x - 1 = 4k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ & x = 4k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} [1] &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x = 4k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\} \end{aligned}$$

Ejemplo

y de forma análoga

$$[2] = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$$

$$[3] = \{\ldots, -4, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$$

$$[4] = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} = [0]$$

y $[-1] = [3]$, $[-2] = [2]$, *etc.*