Relaciones de equivalencia. Particiones

Definición

Sea R una relación sobre A. Se dice que R es

1. **reflexiva** *si* $(\forall a \in A)(aRa)$
2. **simétrica** *si* $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(aRb \Rightarrow bRa)$
3. **antisimétrica** *si* $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$
4. **transitiva** *si* $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in C)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

Ejemplo

Sea R la relación en $\mathbb{Z}$ definida por

$$xRy \Leftrightarrow xy > 0.$$

1. R no es reflexiva pues $0 \not R 0$ porque $0 * 0 \not> 0$.
2. R es simétrica pues

$$aRb \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow ba > 0 \Rightarrow bRa$$

3. R no es antisimétrica pues $1R2$ y $2R1$ pero $2 \neq 1$.
4. R es transitiva pues

$$\begin{aligned} aRb \wedge bRc &\Rightarrow ab > 0 \text{ y } bc > 0 \\ &\Rightarrow \ a \text{ y } b \text{ tienen el mismo signo además } b \text{ y } c \text{ tienen el} \\ &\Rightarrow a \text{ y } c \text{ tienen el mismo signo} \\ &\Rightarrow ac > 0 \\ &\Rightarrow aRc \end{aligned}$$

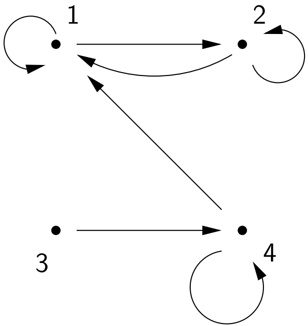
Cuando se tiene una relación sobre un conjunto finito A tal relación se puede representar mediante un *digrafo (o grafo dirigido)*: se pone un vértice por cada $a \in A$ y se dibuja una flecha del vértice a al b siempre y cuando aRb,

$$a \to b \Leftrightarrow aRb.$$

Por ejemplo, la relación

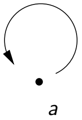
$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

sobre $\{1,2,3,4\}$ tiene digrafo

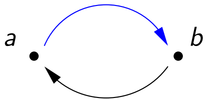


Luego las relaciones se pueden visualizar como:

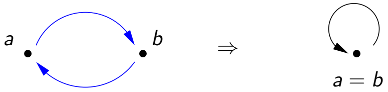
- Reflexiva: para todo $a \in A$,



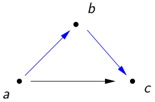
- Simétrica:



- Antisimétrica:



- Transitiva:



donde las flechas azules indican relaciones supuestas, y las flechas negras indican relaciones deducidas.

Ejemplo

Considérese las siguientes relaciones en $\{1,2,3,4\}$:

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

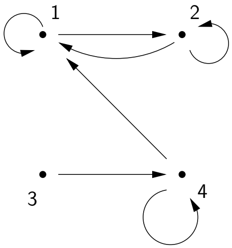
$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}$$

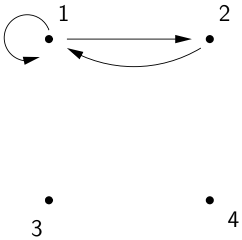
¿Qué propiedades tienen las relaciones anteriores?

Sol. Es conveniente dibujar el digrafo de cada relación.
R_1 :



1. no es reflexiva pues $3 \not R_1 3$ (i.e. $(3,3) \notin R_1$)
2. no es simétrica: $3 R_1 4$ pero $4 \not R_1 3$
3. no es antisimétrica: $1 R_1 2$ y $2 R_1 1$ pero $1 \neq 2$
4. no es transitiva: $4 R_1 1$ y $1 R_1 2$ pero $4 \not R_1 2$

R_2

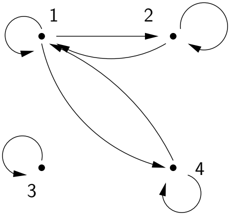


1. no reflexiva: $2 \not R_2 2$
2. sí simétrica:

$$
\begin{aligned}
1R_21 &\Rightarrow 1R_21 \\
1R_22 &\Rightarrow 2R_21 \\
2R_21 &\Rightarrow 1R_21
\end{aligned}
$$

3. no antisimétrica: $1R_22$ y $2R_21$ pero $1 \neq 2$.
4. transitiva: $2R_21$ y $1_R R_2 2$ pero $2 \not R_2 2$

R_3

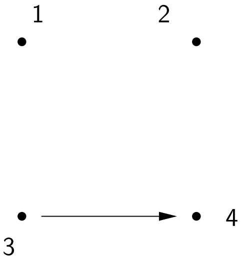


1. sí reflexiva: $1R1$, $2R_32$, $3R_33$, $4R_34$.
2. simétrica:

$$1R_32 \Rightarrow 2R_31$$
$$1R_34 \Rightarrow 4R_31$$
$$2R_31 \Rightarrow 1R_32$$
$$2R_32 \Rightarrow 2R_32$$
$$3R_33 \Rightarrow 3R_33$$
$$4R_31 \Rightarrow 1R_34$$

3. no antisimétrica: $1R_32$ y $2R_31$ pero $1 \neq 2$.
4. no transitiva: $4R_31$ y $1R_32$ pero $4 \not R_3 2$

R_6



1. no reflexiva: $1 \not R 1$.
2. no simétrica: $3R4$ pero $3 \not R 4$
3. sí antisimétrica: no hay elementos que cumplan la condición de antisimétrica. Luego esta es cierta por *vacuidad*.
4. sí transitiva: de nuevo, es cierta por vacuidad.

Tarea

Sea $X = \{a, b, c, d\}$ *y considérese las relaciones sobre* X*:*

$$S_1 = \{(a, c), (b, a), (b, c), (c, d), (d, d)\}$$

$$S_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, d)\}$$

$$S_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}$$

Indique qué propiedades verifican dichas relaciones.

Tarea

Determinar si la relación R *en el conjunto de todas las personas es reflexiva, simétrica, antisimétrica, y/o transitiva, donde* aRb *si*

1. *a es más alto que b*
2. *a y b nacieron el mismo día*
3. *a tiene el mismo nombre de pila que b*
4. *a y b tienen un abuelo o abuela en común*