Definición

Sean A, B conjuntos. Si $f \subseteq A \times B$ entonces f se llama **relación** *o* **correspondencia** *entre A y B. En tal caso f se denota como*

$$f : A \to B$$

Definición

Si $f : A \to B$ es relación y $(a, b) \in f$ entonces

1. *b se llama* **imagen** *de a*
2. *a se llama* **anti-imagen** *o* **preimagen** *de b*
3. *si $a \in A$ arbitrario el* **conjunto de im'agenes** *de a es*

$$f(a) = \{b \in B \,|\, (a, b) \in f\}$$

4. *si $b \in B$ arbitrario, el conjunto de pre-imágenes de b es*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \,|\, (a, b) \in f\}$$

5. *El* **dominio** *de f es*

$$Dom\, f = \{a \in A \,|\, \text{existe } b \in B \text{ con } (a, b) \in f\}$$

6. *El* **rango, recorrido, imagen** *de f es*

$$Im\, f = \{b \in B \,|\, \text{existe } a \in A \text{ con } (a, b) \in f\}$$

Ejemplo

Sea A el conjunto de nombres de las ciudades, B el conjunto de nombres de países. Se define una relación entre A y B como

$$f = \{(a, b) \mid a \text{ está en } b\}$$

Entonces, (Rosario,Argentina)$\in f$, (Barranquilla,Colombia)$\in f$, (Paris, Francia)$\in f$, (Paris,Hilton)$\notin f$, (Mérida,México)$\in f$, (Córdoba,Argentina)$\in f$, (Cŕdoba,México)$\in f$, (Córdoba,España)$\in f$;

- f^{-1}(México) son todos los nombres de las ciudades que están en México
- f(Paris) todos los nombres de los países que tienen a Paris como una ciudad.

Ejemplo

Sean $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$. Se define la relación

$$f = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$$

Nótese que f es un subconjunto propio de $A \times B$. Luego,

1. $f(0) = \{a, b\}$
2. $f(1) = \{a\}$
3. $f(2) = \{b\}$
4. $f^{-1}(a) = \{0, 1\}$
5. $f^{-1}(b) = \{0\}$
6. $Dom\, f = \{0, 1, 2\}$
7. $Im\, f = \{a, b\}$

Ejemplo

Sean $A = \{a, b, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Se puede definir una correspondencia $f : A \to B$ por

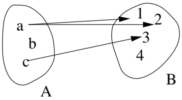
$$f(a) = \{1, 2\}, \quad f(b) = \varnothing, \quad f(c) = \{3\}$$

esto es,

$$f = \{(a, 1), (a, 2), (c, 3)\}$$

Tal correspondencia se puede visualizar por su diagramas *sagital*.

Figura: Diagrama sagital



Como podemos ver

$$Im\, f = \{1, 2, 3\}, \quad Dom\, f = \{a, c\}$$

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es una relación de A en A. En tal caso, si $(a, b) \in R$ entonces se escribe aRb. Esto es:

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

Si $(a, b) \notin R$ se escribe $a \not R b$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se define una relación en A mediante

$$xRy \Leftrightarrow y = 2x$$

entonces $1R2$ pues $2 = 2 * 1$ y $2R4$ pues $4 = 2 * 2$:

$$R = \{(1, 2), (2, 4)\}$$

Ejemplo

Sea S la siguiente relación en $\mathbb{N}$:

$$aSb \Leftrightarrow a \leq b$$

así $(1,2) \in S$ pues $1 \leq 2$, $(2,3) \in S$, $(2,40) \in S$ pero $(40,2) \notin S$.

Ejemplo

$\varnothing$ es una relación sobre cualquier conjunto.

Tarea

Enumerar los pares ordenados de la relación R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *en* $B = \{0, 1, 2, 3\}$ *donde aRb si y sĺo si*

1. $a = b$
2. $a + b = 4$
3. $a > b$
4. *el mx́imo común divisor entre a y b es 1*

Representar tales relaciones mediante su diagrama cartesiano.

Tarea

Escribir por extensión los pares ordenados de la relación R sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*:*

$$aRb \Leftrightarrow \text{ a divide a b}$$