5 Tarea.
Notemos que si

$$A = \{x \in E \mid p(x)\} \text{ y } B = \{x \in E \mid q(x)\}$$

entonces

$$A = B \text{ si y sólo si } \forall x \in E, p(x) \Leftrightarrow q(x).$$

Tal hecho lo podemos usar en la demostración del siguiente.

Teorema

Sean A, B, C conjuntos con conjunto universal E.

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(asociativa)*
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(conmutativa)*
3. *(distributiva)*
   3.1 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   3.2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap E = A$ *(neutro)*
5. $A \cup A^c = E$, $A \cap A^c = \varnothing$ *(complemento)*

Dem. 1. Tarea.

2. Tenemos que, para p, q proposiciones se cumple que

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad \text{y} \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

son tautologías, por que lo se cumplen

$$\forall x \in E, x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$$

y

$$\forall x \in E, x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$$

de donde $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.

3. Tarea.

4.

1. $A \cup \varnothing = A$: que $A \subseteq A \cup \varnothing$ es por una propiedad anterior. Y si $x \in A \cup \varnothing$ entonces $x \in A \vee x \in \varnothing$; como el segundo caso es imposible, entonces $x \in A$. por lo tanto $A \cup \varnothing \subseteq A$. Concluimos
$$A \cup \varnothing = A$$
2. $A \cap E = A$: tarea.

5. Tarea.

Teorema (Leyes de De Morgan)

Sean A, B conjuntos con conjunto universal E.

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dem. 1.

$$\begin{aligned} z \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow z \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow \neg(z \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \neg(z \in A \vee z \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(z \in A) \wedge \neg(z \in B) \quad \text{pues } \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow z \in A^c \wedge z \in B^c \\ &\Leftrightarrow z \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Hemos probado que $\forall z \in E, z \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow z \in A^c \cap B^c$:

$$\therefore (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. Tarea.

Producto cartesiano y relaciones

Definición

Sean A, B conjuntos.

1. *Si $a \in A$ y $b \in B$ entonces (a, b) se dice* **par ordenado**.
2. *Se pone $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*
3. *Se define el* **producto cartesiano** *de A con B como*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

1. $(1,2) \neq (2,1)$
2. $\{1,2\} = \{2,1\}$
3. $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pues

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo

$A = \{a, b, b\}$, $B = \{1, 2\}$. Entonces

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

que se puede representar graficamente por un *diagrama cartesiano*:

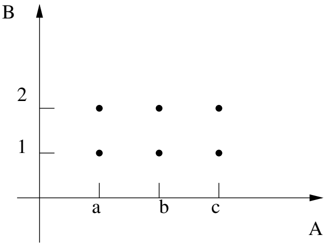

Figura: Producto cartesiano

Propiedad

Sean A, B, C conjuntos.

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Dem.

1.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x = (r, s) \wedge r \in A \cup B \wedge s \in C \\
&\Leftrightarrow x = (r, s) \wedge (r \in A \vee r \in B) \wedge s \in C \\
&\Leftrightarrow x = (r, s) \wedge ((r \in A \wedge s \in C) \vee (r \in B \wedge s \in C) \\
&\Leftrightarrow (x = (r, s) \wedge (r \in A \wedge s \in C)) \\
&\vee (x = (r, s) \wedge r \in B \wedge s \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \times C \vee x \in B \times C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}
$$

2. Tarea.