## Propiedad

*Sean $P, Q, R$ conjuntos con conjunto universal $E$. Entonces*

1. $\varnothing \subseteq P$
2. $P \subseteq P$
3. $P \subseteq E$
4. $P \subseteq Q$ *y* $Q \subseteq R \Rightarrow P \subseteq R$

Dem.

1. Tenemos que demostrar que

$$\forall x \in E, x \in \varnothing \Rightarrow x \in P.$$

La proposición $x \in \varnothing \Rightarrow x \in P$ tiene antecedente falso, luego siempre es verdadera.

2. Se cumple trivialmente que

$$\forall x \in E, x \in P \Rightarrow x \in P$$

3. Tenemos que checar que

$$\forall x \in E, x \in P \Rightarrow x \in E$$

lo cual es obvio.

$\square$

4. Tenemos que demostrar que

$$\forall x \in E, x \in P \Rightarrow x \in R.$$

lo cual haremos *elemento a elemento*:
si $x \in P$ entonces $x \in Q$ pues $P \subseteq Q$ por hipótesis. Luego $x \in R$ pues $Q \subseteq R$ por hipótesis. Hemos probado que $x \in P \Rightarrow x \in R$;

$$\therefore P \subseteq R.$$

## Ejemplo

1. $\varnothing \subseteq \varnothing$ pues un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo.
2. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ pues el conjunto vacío siempre es subconjunto de cualquier otro conjunto.
3. $\varnothing \in \{\varnothing\}$ pues $\varnothing$ que aparece del lado izquierdo está en la descripción del conjunto del lado derecho.
4. $\varnothing \notin \varnothing$ pues el conjunto vacío no tiene elementos.

### Definición

*$P \nsubseteq Q$ significa que $P$ no es subconjunto de $Q$.*

### Ejemplo

1. $\{\varnothing\} \nsubseteq \varnothing$
2. $\{1, 3, 4, 2\} \not\subset \{1, 5, 4, 2\}$

### Definición

*Se dice que $\varnothing$ y $P$ son* **subconjuntos impropios** *de $P$; los otros subconjuntos de $P$ se llaman* **propios**.

### Definición

*Sea $Q$ un conjunto. Se define el conjunto*

$$2^Q = \mathcal{P}(Q)$$

*como el conjunto de todos los subconjuntos de $Q$ y se llama* **conjunto potencia** *o* **conjunto de partes** *de $Q$.*

Que tal colección es realmente un conjunto lo asegura el axioma del conjunto potencia según Zermelo-Fraenkel o bien el axioma W según los axiomas NBG.

## Ejemplo

1. Sea $Q = \{a, b, c\}$. Entonces
$$\mathcal{P}(Q) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$
2. Sea $R = \{a\}$. Entonces
$$\mathcal{P}(R) = \{\varnothing, \{a\}\}$$
3. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$

## Definición

*Si $P$ es un conjunto con $|P|$ se denota al número de elementos de $P$ y tal se llama la* **cardinalidad** *del conjunto.*

En los ejemplos anteriores

$$|2^Q| = 8 = 2^{|Q|}$$

$$|2^R| = 2 = 2^{|R|}$$

$$|2^\varnothing| = 1 = 2^{|\varnothing|}$$

Posteriormente se demostrará que, en general si $Q$ es un conjunto finito entonces

$$|2^Q| = 2^{|Q|}$$

## Tarea

*¿Cuál es la cardinalidad de estos conjuntos?*

1. $\{a\}$
2. $\{a, \{a\}, a\}$
3. $\{\{a, a\}, \{b, b\}\}$
4. $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

## Tarea

*¿Cuál es la cardinalidad de estos conjuntos?*

1. $\varnothing$
2. $\{\varnothing\}$
3. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
4. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

## Tarea

*Obtener el conjunto potencia de*

1. $\{\varnothing\}$
2. $\{a, b\}$
3. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

## Tarea

*¿Cuántos elementos tiene el conjunto $2^A$?*

1. $A = \{a, b, \{a, b\}\}$
2. $A = \{\varnothing, a\}$
3. $A = \{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$
4. $A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
5. $A = 2^{\varnothing}$

## Tarea

*Determinar si alguno de los siguientes es el conjunto potencia de algún conjunto (¿cuál?).*

1. $\varnothing$
2. $\{\varnothing, \{a\}\}$
3. $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$
4. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

### Definición

*Sean $P, Q$ conjuntos con conjunto universal $E$. Se dice que $P$ y $Q$ son* **iguales** *si $P \subseteq Q$ y $Q \subseteq P$. En tal caso se escribe $P = Q$. Es decir*

$$P = Q \Leftrightarrow P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P.$$

### Ejemplo

$$\{a, a\} = \{a\}$$

pues si $\{a, a\} \subseteq \{a\}$ porque si $x \in \{a, a\}$ entonces $x = a \in \{a\}$; y recíprocamente, $\{a\} \subseteq \{a, a\}$.