Regla de la suma

Regla de la suma: si una primera primera tarea se puede realizar de n_1 formas y un segunda tarea se puede realizar de n_2 formas y si las dos tareas son ajenas (intersección vacía) entonces hay $n_1 + n_2$ formas de realizar una u otra tarea.

Ejemplo

Supongamos que para elegir un representante de la facultad en una comisión universitaria se puede elegir entre un profesor y un estudiante de maestría ¿de cuántas formas se puede elegir el representante si hay 37 profesores y 83 estudiantes de maestría?

Sol.

La tarea de elegir el profesor se puede hacer de 37 formas y la del estudiante de 83 formas. Como no hay un profesor que sea estudiante de maestría en esta facultad y no hay estudiantes de maestría que sean profesores, entonces hay 37+83 formas de elegir el representante. □

Regla de la suma generalizada:

Supóngase que las tareas $T_1, T_2, \ldots, T_m$ se pueden hacer respectivamente de $n_1, n_2, \ldots, n_m$ formas y que éstas tareas son ajenas dos a dos ($T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $T_1 \cap T_3 = \varnothing$, $\ldots$, $T_1 \cap T_n = \varnothing$, $T_2 \cap T_3 = \varnothing, \ldots$). Entonces, el número de formas de hacer la tarea T_1 ó T_2 ó $\ldots$ ó T_m es $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Ejemplo

Un estudiante puede elegir un proyecto de trabajo de entre tres listas. Cada una contiene, respectivamente, 23, 15 y 19 propuestas de trabajo. ¿Cuántos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?

Sol.

El estudiante puede elegir la primera lista 23 opciones, de la segunda 15 y 19 de la tercera. Como estas opciones son ajenas, entonces hay 23+15+19=57 proyectos a elegir. $\square$

Ejemplo

En una versión del lenguaje BASIC el nombre de una variable es una cadena de uno o dos caracteres alfanuméricos (caracter alfanuméricos = dígitos ó una de las 26 letras del alfabeto inglés). Además, un nombre de una variable debe de empezar con una letra y debe de ser diferente a cinco cadenas de dos carcateres que están reservados por el lenguaje ¿Cuántos nombres de variables diferentes hay en dicha versión del lenguaje BASIC?

Sol. Sea n_1 el número de variables compuestas por un sólo caracter y n_2 el número de variables compuestos por dos caracteres. El número total de variables será

$$n = n_1 + n_2$$

por la regla de la suma.
Tenemos $n_1 = 26$ por definición. Además cada caracter de dos letras está compuesto de

1. una letra (26 formas),
2. un caracter alfanumérico (26 letras + 10 dígitos = 36 formas)

luego por la regla del producto

$$n_2 = 26 * 36 - 5 = 931.$$

Por lo que el número de variables es

$$n = 931 + 26 = 957.$$

Ejemplo

En cierto computador cada usuario tiene una contraseña, con una longitud de entre 6 y 8 caracteres, cada una de las cuales es un dígito o una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito ¿Cuántas contraseñas admite el sistema?

Sol. Sea P_6 el número de contraseñas de 6 caracteres, P_7, P_8 definidos similarmente. Según la regla de la suma generalizada, el número total de contraseñas es

$$P = P_6 + P_7 + P_8.$$

Contaremos P_6 indirectamente: el número de contraseñas de 6 caracteres es de 36^6 y el número de contraseñas sin dígitos es 26^6, luego

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 1,867,866,560.$$

Similarmente:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 70,332,353,920$$
$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2,612,282,842,880$$

de donde

$$P = 2,684,483,063,360.$$

Tarea

1. *¿Cuántas cadenas de cuatro letras minúsculas hay que contengan la letra x?*
2. *¿Cuántas cadenas de cuatro letras minúsculas hay que contengan la letra x?*
3. *¿Cuántas cadenas de cinco caracteres ASCII contienen el caracter @ al menos una vez? (Hay 128 caracteres ASCII).*
4. *De las cadenas de tres dígitos decimales,*
   4.1 *¿Cuántas no contiene el mismo dígito tres veces?*
   4.2 *¿Cuántas comienzan con un dígito impar?*
   4.3 *¿Cuántas contienen exactamente dos cuatros?*
   4.4 *¿Cuántas matrículas se pueden formar utilizando bien tres dígitos seguidos de tres letras mayúsculas o bien tres letras mayúsculas seguidas de tres dígitos?*

5. De entre un alfabeto de 26 letras mayúsculas y 26 minúsculas, ¿cuántas cadenas de ocho caracteres existen si
   5.1 si las letras se pueden repetir?
   5.2 si ninguna letra se puede repetir?
   5.3 que empiecen por X si ninguna letra se puede repetir?
   5.4 que empiecen y terminen en X si las letras se pueden repetir?
   5.5 que empiecen y terminen en la cadena BO si las letras se pueden repetir?
   5.6 que empiecen o terminen en la cadena BO si las letras se pueden repetir?
   5.7 ¿Cuántas funciones hay entre el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y el conjunto $\{0, 1\}$?
6. Un palíndromo es una cadena que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. ¿Cuántas cadenas de n caracteres son palíndromos?

Cuando las tareas no son ajenas se puede usar el principio de inclusión-exclusión. La idea es que bajo estas condiciones el simple uso de la regla de la suma cuenta doble las tareas repetidas. Por lo que, de la suma, se deben de restar los elementos de la intersección.

Teorema (inclusión-exclusión)

Sean A, B conjuntos con conjunto universal E. Entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dem. Tenemos que

$$(A \cap B^c) \cup B = A \cup B \tag{1}$$

pues

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap E) \cup B \\ &= (A \cap (B \cup B^c)) \cup B \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \cup B && \text{distributiva,} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((A \cap B) \cup B), && \text{conmutativa y asociativa} \\ &= (A \cap B^c) \cup B && \ldots A \cap B \subseteq B \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B^c) \cup (A^c \cup B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup ((A^c \cup A) \cap B) \\
&= (A \cap B^c) \cup B \\
&= A \cup B && \text{según (1)}
\end{aligned}
$$

Para contar los elementos de $A \cup B$ podemos usar la regla generalizada de la suma en la ecuación (3), pues los conjuntos del lado izquierdo son ajenos:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B) &= \varnothing \\
(A \cap B^c) \cap (A \cap B) &= \varnothing \\
(A \cap B^c) \cap (A \cap B) &= \varnothing;
\end{aligned}
$$

y obtenemos

$$
|A \cup B| = |A \cap B^c| + |A^c \cap B| + |A \cap B|
$$

pero de (1) $|A \cup B| = |A \cap B^c| + |B|$, de donde $|A \cap B^c| = |A \cup B| - |B|$; y de la ecuación (2), de forma similar, obtenemos $|A \cup B| = |A^c \cap B| - |A|$. Por lo que

$$|A \cup B| = |A \cup B| - |B| + |A \cup B| - |A| + |A \cap B|$$

despejando y cancelando:

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cup B|.$$

El teorema de inclusión-exclusión puede redactarse de la forma siguiente:
Principio de inclusión-exclusión: si una tarea T_1 se puede realizar de n_1 formas y una tarea T_2 se puede realizar de n_2 formas entonces, las formas de realizar la tarea T_1 ó T_2 es $n_1 + n_2$ menos las formas de realizar simuláneamente las tareas T_1 y T_2.

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de bits hay que tengan longitud 8 y que comiencen con 1 o bien que terminen en 00?

Sol.

El número de cadenas de longitud 8 que comienzan en 1 es 2^7, mientras que el número de cadenas de longitud 8 que terminan en 00 es $2^6 = 64$. A su vez, el número de cadenas que comienzan con 1 y terminan en 00 es $2^5 = 32$. Luego el total pedido es

$$128 + 64 - 32 = 160.$$

Ejemplo

En la versión 4 del protocolo de Internet (IPv4) a cada máquina conectada se le asigna una cadena de caracteres de 32 bits (dirección IP). La cadena tiene un *netid* (número de red) y un *hostid* (número de servidor).
Se usan tres formas de direcciones con una cantidad diferente de bits para el netid y el hostid:

- Clase A (direcciones de redes grandes): la dirección IP empieza con un 0 y luego un netid de 7 bits. El hostid usa los restantes 24 bits.
- Clase B (direcciones de redes medianas): empiezan con 10 y luego el netid usa 14 bits y el hostid los restantes 16 bits.
- Clase C (dirección de redes pequeñas): empiezan con 110 seguido por un netid de 21 bits y un hostid de 8 bits.

Existen restricciones:

- Clase A: ningún netid es 1111111; ningún hostid está compuesto de sólo 0's y 1's.
- Clase B: ningún hostid está compuesto de sólo 0's o sólo 1's.
- Clase C: las mismas que en la clase B.

¿Cuántas direcciones disponibles IP hay según el sistema IPv4?

Sol. Sean P_A el conjunto de cadenas de clase A, P_B las de clase B y P_C las de clase C. Notemos que tales conjuntos son ajenos. Luego el nuḿero total pedido es

$$|P_A| + |P_B| + |P_C|.$$

Contemos los elementos de P_A, P_B, P_C.
Para P_A: el netid se puede elegir de $2^7 - 1$ formas (recordar que sólo unos no está permitido) y el hostid de $2^{24} - 2$ (hay dos excepciones). Luego

$$|P_A| = (2^7 - 1)(2^{24} - 2) = 2,130,706,178.$$

Para P_B: el netid se puede elegir de 2^{14} formas y el hostid de $2^{16} - 2$ formas:

$$|P_B| = 2^{14}(2^{16} - 2) = 1,073,709,056$$

Similarmente

$$|P_C| = 2^{21}(2^8 - 2) = 532,676,608.$$

Luego, el número de direcciones, según IPv4, es

$$2,130,706,18 + 1,073,709,056 + 532,576,608 = 3,737,091,842.$$