Axiomas de la Teoría de Conjuntos

Para evitar las paradojas existen reglas para la formación de los conjuntos. Un ejemplo de tales son los *axiomas de Zermelo-Fraenkel*. En general, estos axiomas tienen la forma "si tal conjunto existe entonces tal otro existe" y tales presuponen el conocimiento de la lógica de predicados. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel son

- Extensionalidad
- Reemplazo
- Conjunto potencia
- Conjunto unión (suma)
- Infinitud
- Elección
- Regularidad

Por ejemplo, el axioma de extensionalidad dice que si dos conjuntos X, Y son iguales entonces ellos pueden pertenecer a un mismo conjunto Z; en símbolos

$$(\forall X)(\forall Y)((X = Y) \Rightarrow (\forall Z)((X \in Z) \Rightarrow (Y \in Z)))$$

No es la intención en este curso desarrollar axiomaticamente la teoría de conjuntos. Nuestro objetivo es más modesto. Trataremos a los conjuntos desde el *punto de vista inocente* (naive set theory). Sin embargo conviene destacar ciertos hechos de la teoría axiomática de conjuntos.
Como consecuencia de tales axiomas se puede demostrar, por ejemplo, la existencia del conjunto vacío $\varnothing$, así como el siguiente teorema:

Teorema (de Separación)

Si E es un conjunto y $p(x)$ una función proposicional, el conjunto

$$\{x \in E \mid p(x)\}$$

existe.

Formalmente el teorema de separación se escribe como

Teorema (de Separación)

$$(\forall E)(\exists P)(\forall x)((x \in P) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge p(x)))$$

En otras palabras, lo que el teorema de separación asegura es que si de antemano sabemos que tenemos un universo de discurso como un conjunto entonces podemos formar conjuntos por comprensión. Examinemos el conjunto A que conduce a la paradoja de Russell. Tal es

$$A = \{X \in E \mid X \notin X\}$$

donde tomamos como referencial E el *conjunto* de todos los conjuntos. Según el teorema de separación, A es conjunto a condición de que E lo sea. Pero E que es la colección de todos los conjuntos no sabemos de antemano que *sea un conjunto*. De hecho no puede serlo, pues la suposición de que lo es conduce a contradicciones en la construcción de A. *No existe el conjunto de todos los conjuntos.*

Si la colección de todos los conjuntos no es un conjunto, entonces ¿qué es? Respuesta: es una *clase*.

Axiomas de clases NBG (Neumann-Bernays-Gödel)

Como pudo notarse de la discusión anterior, no definimos formalmente lo que es un conjunto. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel sólo dicen cómo, si ya se tiene un conjunto, se pueden construir otros. Es decir, el concepto de "conjunto" se deja indefinido.

Una alternativa a los axiomas de Zermelo-Fraenkel para explicar la teoría de conjuntos, son los axiomas BNG. En la teoría BNG se deja como concepto indefinido "clase".

Definición

X es un conjunto si existe una clase $\mathcal{Y}$ tal que X pertenece a tal clase, i.e., si

$$(\exists \mathcal{Y})(X \in \mathcal{Y})$$

Las clases que no son conjuntos se llaman *clases propias*. Luego $\mathcal{A}$ la clase de todos los conjuntos es una clase propia.

Los axiomas BNG son

1. T
2. P (paridad)
3. N (conjunto vacío)
4. Existencia de clases
5. U (suma de conjuntos)
6. W (potencia de conjuntos)
7. R (reemplazo)
8. I (infinito)

Por ejemplo el axioma T dice que

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 \Rightarrow (\mathcal{X}_1 \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \mathcal{X}_2 \in \mathcal{Z})$$

que es una modificación del axioma de extensionalidad. Mientras que el axioma N dice que existe una clase vacía:

$$(\exists \mathcal{X})(\forall \mathcal{Y})(\mathcal{Y} \notin \mathcal{X})$$

Luego se puede mostrar que tal $\mathcal{X}$ es un conjunto y tal se denota con $\varnothing$.

Teoría de conjuntos ingenua (Naive set theory)

A pesar de que existen serias formalizaciones de la teoría de conjuntos, nos contentaremos con desarrolar su álgebra usando el punto de vista inocente.

Ejemplo

1. $2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 2h, \text{ para algún } h \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ que es el conjunto de números naturales pares.
2. $\{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 < x < 2\} = \varnothing$ conjunto vacío.
3. $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, 7 < x^2 < 16 \wedge x > 0\} = \{3\}$ conjunto unitario.
4. $V = \{a, e, i, o, u\}$ conjunto definido por extensión.

El símbolo $\in$ no es transitivo. Por ejemplo: para

$$P = \{r \mid r \text{ es una recta del plano}\}$$

tomemos $\ell \in P$, i.e. ℓ una recta del plano y p un punto en tal recta. Luego,

$$p \in \ell \in P$$

pero $p \notin P$ pues p no es una recta.

Definición

Sean P, Q dos conjuntos con conjunto universal E. Se dice que P está **contenido (incluido)** *en Q si*

$$\forall x \in E \; x \in P \Rightarrow x \in Q$$

en tal caso se escribe

$$P \subset Q$$

o bien

$$P \subseteq Q$$

y se dice que P es subconjunto de Q.

Notemos que si

$$P = \{x \in E \,|\, p(x)\} \text{ y } Q = \{x \in E \,|\, q(x)\}$$

entonces

$$P \subset Q \Leftrightarrow \forall x \in E, p(x) \Rightarrow q(x)$$

Ejemplo

Sean

$$P = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es múltiplo de } 10\}, \quad Q = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es múltiplo de } 2\}$$

Entonces

$$P \subset Q$$

pues si x es múltiplo de 10 natural entonces existe un natural h que cumple

$$x = 10h = 2(5h)$$

luego x es también múltiplo de 2.