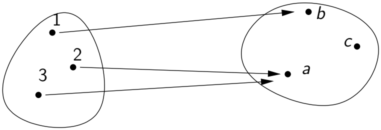
Funciones

Definición

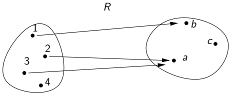
Sea $f : A \to B$ una relación de A en B. La relación f se llama **función** *si*

1. $Dom\, f = A$
2. $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)\big(((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c\big).$

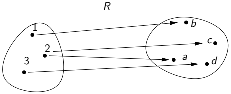
Ejemplo

1. 

   representa una función.

2. 

   no es una función pues $Dom\, R \neq \{1, 2, 3, 4\}$.

3. 

   no es función pues $(2, c) \in R$ y $(2, a) \in R$ pero $c \neq a$.

Ejemplo

Sea A el conjunto de mujeres con novio, B el conjunto de hombres. Se define una relación f de A en B como

$$afb \Leftrightarrow a \text{ es novia de } b$$

Tal f resulta una función si *creemos que las mujeres no pueden tener más de un novio*:

1. $Dom\, f = A$: recordemos que

   $$Dom\, f = \{a \in A \,|\, \exists b \in B \text{ tal que } afb\}$$

   es decir $Dom\, f$ es el conjunto de mujeres que tienen novio, siendo este precisamente A.
2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ entonces a es novia de b y también a es novia de c. Según nuestra creencia, se debe de seguir que $b = c$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relación definida por

$$xfy \Leftrightarrow x^2 = y$$

f es función pues

1. $Dom\, f = \mathbb{R}$: recordemos que, por definición,

   $$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists y \in \mathbb{R}, xfy\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists y \text{ tal que } x^2 = y\}$$

   Luego $Dom\, f \subseteq \mathbb{R}$ evidentemente. Mientras que $\mathbb{R} \subseteq Dom\, f$ es porque si $x \in \mathbb{R}$ entonces $(x, x^2) \in f$, luego $x \in Dom\, f$.

   $$\therefore Dom\, f = \mathbb{R}.$$

2. Supongamos que $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ entonces $a^2 = b$ y $a^2 = c$, de donde $b = c$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relación definida por

$$xfy \Leftrightarrow x = y^2$$

f no es función pues $Dom\, f \neq \mathbb{R}$. En efecto, $-1 \in \mathbb{R}$ pero si $-1 \in Dom\, f$ entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $-1 = y^2$ lo cual es imposible. Por lo que $-1 \notin Dom\, f$. Por lo tanto $\mathbb{R} \neq Dom\, f$.

Ejemplo

Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ relación definida por

$$xfy \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$$

f no es función, pues

$$(1, 1) \in f \text{ y } (1, -1) \in f \text{ pero } 1 \neq -1.$$

Definición

Si $f : A \to B$ función y $a \in A$, se define

$$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f \Leftrightarrow afb$$

en tal caso b se llama **imagen** *de a bajo f.*

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$. La siguiente relación

$$f = \{(1, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}$$

es una función, donde $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = b$ y $f(4) = a$.

Propiedad

Sea A un conjunto y $Id_A : A \to A$ relación definida por

$$a Id_A b \Leftrightarrow a = b$$

entonces Id_A es una función (llamada **función identidad***). Además*

$$(\forall a \in A)(Id_A(a) = a)$$

Demostración.

1. $Dom\, Id_A = A$: que $Dom\, Id_A \subseteq A$ es por definición. Por demostrar que $A \subseteq Dom\, Id_A$. Sea $a \in A$, entonces $a\, Id_A a$, luego $a \in Dom\, Id_A$.
2. Supongamos que $(a, b) \in Id_A$ y $(a, c) \in Id_A$ entonces $b = a$ y $c = a$, de donde $b = c$.

Notemos, además que $\forall a \in A$ se cumple que $(a, a) \in Id_A$, luego por definición $Id_A(a) = a$. $\square$

Definición

Sean $R : A \to B$, $S : B \to C$ *relaciones. Se define la* **relación composición** *como la relación* $S \circ R : A \to C$,

$$aS \circ Rc \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc.$$

Ejemplo

Sean

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad C = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$$

y relaciones

$$R : A \to B, \quad S : B \to C.$$

definidas por

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, c)\}, \quad S = \{(a, \alpha), (a, \delta), (b, \alpha), (c, \gamma)\}.$$

Entonces

$$S \circ R = \{(1, \delta), (1, \alpha), (3, \gamma)\}$$

pues

- $(1, \delta) \in S \circ R$ pues $\exists a \in B$ tal que $1Ra$ y $aS\delta$;
- $(1, \alpha) \in S \circ R$ porque $\exists a \in B$ con $1Ra$ y $aS\alpha$;
- $(3, \gamma) \in S \circ R$ pues $\exists c \in B$ tal que $3Rc$ y $cS\gamma$.

Teorema

Si $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *son funciones, entonces la relación composición* $g \circ f : A \to C$ *es una función. Además*

$$(\forall a \in A)\,(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Dem.

1. Por definición

$$Dom\, g \circ f = \{a \in A \,|\, \exists c \in C,\ a\, g \circ f\ c\}$$

de donde $Dom\, g \circ f \subseteq A$. Recíprocamente, que $A \subseteq Dom\, g \circ f$ es porque si $a \in A$ como $A = Dom\, f$ entonces existe $b \in B$ tal que afb. Pero $B = Dom\, g$, luego existe $c \in C$ tal que bgc. Tenemos

$$afb \text{ y } bgc$$

entonces, por definición de composición, $a\, g \circ f\ c$. Esto es $a \in Dom\, g \circ f$.

2. Supongamos que $a\, g \circ f\ c_1$ y $a\, g \circ f\ c_2$. Por demostrar que $c_1 = c_2$. Como $a\, g \circ f\ c_1$ entonces existe $b_1 \in B$ tal que

$$afb_1 \text{ y } b_1gc_1$$

y como $a\, g \circ f\ c_2$ existe $b_2 \in B$ tal que

$$afb_2 \text{ y } b_2gc_2$$

Notemos que tenemos afb_1 y afb_2 luego, como f es función se sigue que $b_1 = b_2$. De donde

$$b_1 g c_2 \text{ y } b_1 g c_1$$

y como g es función se sigue que $c_1 = c_2$.

$$\therefore g \circ f \text{ es función.}$$

Tomemos $a \in A$ arbitrario. Entonces, por definición de imagen

$$(a, (g \circ f)(a)) \in g \circ f.$$

También $(a, f(a)) \in f$ y $(f(a), g(f(a))) \in g$; por lo que

$$(a, g(f(a))) \in g \circ f,$$

entonces, como $g \circ f$ es función,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$