Relaciones de Orden. Retículos

Definición

1. *Una relación R sobre el conjunto A se dice de* **orden** *si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En tal caso R se escribe como $\leq$ y al par $(A, \leq)$ se le llama* **conjunto (parcialmente) ordenado**.
2. *Si $(A, \leq)$ es conjunto parcialmente ordenado como en el inciso anterior y $a, b \in A$, entonces*

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b \\ &\Leftrightarrow aRb \wedge a \neq b \end{aligned}$$

Ejemplo

La relación S en $\mathbb{R}$ dada por

$$xSy \Leftrightarrow x \leq y$$

es un orden pues

1. reflexiva: $(\forall x \in \mathbb{R})$, xSx pues $x \leq x$
2. antisimétrica: si xSy y ySx entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.
3. transitiva: si xSy y ySz entonces $x \leq y$ y $y \leq z$ luego $x \leq z$.

Ejemplo

Sea E un conjunto. Se define la relación en 2^E por

$$ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$$

R es un orden pues:

1. reflexiva: $\forall A \subset E$, $A \subseteq A$
2. antisimétrica: si ARB y BRA entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$ según la definición de igualdad de conjuntos.
3. transitiva: si ARB y BRC entonces $A \subseteq B$ y $B \subset C$ entonces, por propiedad anterior $A \subseteq C$, i.e., ARC.

Definición

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

Ejemplo

En $\mathbb{N}^*$ se define la relación

$$aSb \Leftrightarrow a|b$$

entonces S es un orden:

1. reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}^*$ $a|a$ luego aSa.
2. antisimétrica:

$$\begin{aligned} aSb \wedge bSa &\Rightarrow a|b \wedge b|a \\ &\Rightarrow b \text{ es múltiplo de } a \text{ y } a \text{ lo es de } b \\ &\Rightarrow b = k_1 a \wedge a = k_2 b \text{ para ciertos } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow b = k_1 k_2 b \text{ sustituyendo } a \text{ en la primer ecuación} \\ &\Rightarrow k_1 k_2 = 1 \\ &\Rightarrow k_1 = 1 = k_2 \vee k_1 = -1 = k_2 \end{aligned}$$

si ocurriera lo segundo entonces $a = -b < 0$ lo cual es absurdo pues $a \in \mathbb{N}^*$. Por tanto el segundo caso es

imposible. Luego $k_1 = 1 = k_2$ lo que implica $a = b$.
3. transitiva:

$$\begin{aligned}
aSb \wedge bSc &\Rightarrow a|b \wedge b|c \\
&\Rightarrow b = k_1 a \wedge c = k_2 b \text{ para ciertos } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \text{ sustituyendo } b \text{ en la segunda ecuación:} c = k_2 k_1 a \\
&\Rightarrow c = k_3 a \text{ con } k_3 = k_2 k_1 \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow a|c \\
&\Rightarrow aSc
\end{aligned}$$

Tarea

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son parcialmente ordenados? Demuestre.

1. $(\mathbb{Z}, =)$
2. $(\mathbb{Z}, \geq)$
3. $(\mathbb{Z}, \neq)$
4. $(\mathbb{Z}, \nmid)$

Definición

Sea $(A, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que* $(A, \leq)$ *está* **totalmente ordenado** *o* **orden lineal** *si*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \leq y \vee y \leq x)$$

Ejemplo

$(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado.

Ejemplo

$(\mathbb{N}^*, |)$ no es totalmente ordenado pues existen $2, 3 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$2 \nmid 3 \text{ y } 3 \nmid 2$$

Ejemplo

Si $X = \{a, b, c\}$, entonces $(2^X, \subseteq)$ no es totalmente ordenado pues

$$\{a\} \nsubseteq \{b\} \text{ ni } \{b\} \nsubseteq \{a\}$$

Tarea

Encontrar dos elementos no comparables en

1. $(2^{\{0,1,2\}}, \subseteq)$
2. $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, |)$