# Proposiciones, predicados y paradojas

## Definición

*Una proposición es una afirmación de la qiue se puede decir sin ambiguedad y de manera excluyente que es cierta o falsa.*

## Ejemplo

1. El hierro es un metal.
2. $2 + 2 = 5$
3. $x$ es un número entero.

Las dos primeras son proposiciones, la tercera, como depende de $x$, se llama función proposicional.

## Definición

*Una* **función proposicional** *es una expresión que contiene variables $x, y, z, \ldots$, de manera que cuando $x, y, z, \ldots$ se sustituyen por objetos de un cierto* **referencial** *o* **universo de discurso** *(***conjunto universal***), se convierte en una proposición.*

## Ejemplo

*Sea $E = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$. Sean las funciones proposicionales*

$$p(x) : x \text{ es múltiplo de } 2$$
$$q(x) : x \text{ es múltiplo de } 3.$$

*entonces, $p(8)$ es cierta y $q(20)$ es falsa.*

El *predicado* de $p(x)$ es "múltiplo de 2" y el de $q(x)$ es "múltiplo de 3". Tales se acostumbran identificar con $p$ y $q$ respectivamente.

### Definición

*Sea $E$ el universo de discurso de una función proposicional $p(x)$. Con la notación*

$$P = \{x \in E \,|\, p(x)\} = \{x \in E \,:\, p(x)\}$$

*se simboliza al conjunto $P$ formado por los elementos $x$ del referencial $E$ para los cuales $p(x)$ es cierta. Aquí se dice que $P$ está definido por* **comprensión**.

A veces, $E$ se sobrerentiende y entonces se puede omitir:

$$P = \{x \,|\, p(x)\}.$$

Un conjunto también se puede definir por **extensión** encerrando sus elementos entre llaves.

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

### Definición

*Si el elemento $x$ del universo $E$ está en el conjunto $P$ entonces se escribe $x \in P$ que se lee "equis pertenece a $P$"; y si $x$ no está en $P$ se escribe $x \notin P$ que se lee "equis no pertenece a $P$". Esto es*

1. $x \in P \Leftrightarrow p(x)$
2. $x \notin P \Leftrightarrow \neg p(x)$

### Definición

*Si se tiene que*

$$P = \{x \in E \mid p(x)\} = \{x \in E \,:\, p(x)\}$$

*y se cumple $\forall x, \neg p(x)$ es decir que siempre $p(x)$ es falso, entonces se dice que $P$ es vacío y se pone*

$$P = \varnothing$$

1. Si $P = E$ entonces $P$ se llama **conjunto universal**.
2. Si $P$ tiene un solo elemento, se llama **conjunto unitario**.
3. Los términos **familia, clase** son usados como sinónimos de conjunto.
4. En ciertos contextos, por **clase** se entiende una generalización del término "conjunto": todo conjunto es una clase, pero no toda clase es un conjunto. Esta distinción se hace para evitar *paradojas.* Una paradoja es una afirmación que es al mismo tiempo verdadera y falsa.

# Paradoja de Russel (1902)

Sabemos que un conjunto es una colección de objetos, por ejemplo $P$ el conjunto de enteros pares o $C$ el conjunto de músicos que tocan cumbias en Acajete, Puebla. También se pueden formar colecciones de conjuntos, por ejemplo,

$$D = \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{N}\}$$

así, $\mathbb{R} \in D$, $\mathbb{Z} \in D$, $\mathbb{N} \in D$. O por ejemplo $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ el conjunto de todos los subconjuntos de números enteros:

$$\{1, 2, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad \mathbb{Z} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}).$$

Muchas veces los conjuntos no son miembros de ellos mismos. Por ejemplo si $P$ es el conjunto de los perros, entonces Manchitas $\in P$ (Manchitas es un perro), pero $P \notin P$ pues el conjunto de los perros no es un perro. Sin embargo podría haber conjuntos que pertenezcan a sí mismos: por ejemplo si $E$ es *el conjunto de todos los conjuntos* entonces $E \in E$.

Consideremos el conjunto

$$A = \{X \text{ conjunto} \,|\, X \notin X\}$$

nos preguntamos: ¿$A \in A$? Si $A \in A$ entonces $A$ es un conjunto tal que $A \notin A$. Pero si $A \notin A$ entonces $A$ cumple con las condiciones de los elementos que pertenecen a $A$; por lo que $A \in A$. En resumen

$$\begin{cases} \text{si } A \in A \Rightarrow A \notin A \\ \text{si } A \notin A \Rightarrow A \in A \end{cases}$$

Hemos obtenido una paradoja!

## Ejemplo (Paradoja de Grellings (1908))

1. Un adjetivo se llama *autológico* si el adjetivo se cumple para el mismo adjetivo.
2. Un adjetivo se lama *heterológico* si la propiedad denotada por el adjetivo no se cumple para el mismo adjetivo.

Por ejemplo

1. polisilábico es autológico
2. español es autológico
3. inglés es heterológico
4. monosilábico es heterológico

¿heterológico es heterológico?
Si heterológico fuera heterológico entonces debería ser autológico y así no heterológico.
Si heterológico es no heterológico , entonces no tiene la propiedad descrita por él mismo luego es heterológico.
De nuevo una paradoja.

La paradoja de Russel se llama *sintáctica* porque resulta del uso de la sintaxis, de los símbolos; mientras que la de Grelling es de carácter *semántico* pues resulta de la interpretación (semántica) que le damos a las palabras.
Tales paradojas resultan de la *autorecurencia* de las definiciones: para definir el conjunto de la paradoja de Russell se hace uso del mismo conjunto. Similarmente, para definir los adjetivos como autológicos o heterológicos se hace referencia a los mismos adjetivos. Tal fenómeno de autorecurrencia se puede visualizar en los grabados del holandés M. C. Escher. Las paradojas son indeseables en Matemáticas.