Otra forma de representar relaciones es con *matrices*.

Definición

Sea R una relación de $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. La **representación matricial** *de R es una matrix $M_R = (m_{i,j})$ de tamaño $n \times m$ donde*

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & si\ a_i R b_j; \\ 0, & si\ a_i \not R b_j \end{cases}$$

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. Sea R relación de A en B definida por

$$aRb \Leftrightarrow a > b.$$

Calcular su representación matricial.

Sol.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\square$

Ejemplo

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. ¿Cuáles pares ordenados forman la relación con representación matricial

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Sol.

Ponemos

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Luego las parejas de la relación corresponden a los pares donde aparece un 1:

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}.$$

Las representaciones matriciales de relaciones son útiles especialmente cuando se hacen operaciones sobre relaciones.

Propiedad

Sean R_1, R_2 dos relaciones sobre un mismo conjunto A. Entonces, la representación matricial de la unión $R_1 \cup R_2$ es

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}.$$

Mientras que la representación matricial de la intersección $R_1 \cap R_2$ es

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

Donde $\vee$ indica aplicar la operación $\vee$ entrada a entrada; similarmente $\wedge$.

Dem.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pongamos $M_{R_1 \cup R_2} = (c_{i,j})$, $M_{R_1} = (\alpha_{i,j})$, $M_{R_2} = (\beta_{i,j})$. Tenemos dos casos

1. $c_{i,j} = 1$;
2. $c_{i,j} = 0$.

1. En este caso, por definición, $a_i(R_1 \cup R_2)a_j$, i.e., $(a_i, a_j) \in R_1 \cup R_2$, luego $(a_i, a_j) \in R_1$ ó $(a_i, a_j) \in R_2$ lo que indica que $a_i R_1 a_j$ ó $a_i R_2 a_j$, de donde se sigue que $\alpha_{i,j} = 1$ ó $\beta_{i,j} = 1$. Estas ecuaciones implican que $\alpha_{i,j} \vee \beta_{i,j} = 1 = c_{i,j}$.
2. Aquí $(a_i, a_j) \notin R_1 \cup R_2$, i.e, $(a_i, a_j) \notin R_1$ y $(a_i, a_j) \notin R_2$, i.e., $a_i \not R_1 a_j$ y $a_1 \not R_2 a_j$ lo que permite poner $\alpha_{i,j} = 0$ y $\beta_{i,j} = 0$ por lo que $\alpha_{i,j} \vee \beta_{i,j} = 0 = c_{i,j}$.

En cualquier caso $\alpha_{i,j} \vee \beta_{i,j} = c_{i,j}$. Por lo tanto

$$M_{R_1} \vee M_{R_2} = (\alpha_{i,j} \vee \beta_{i,j}) = (c_{i,j}) = M_{R_1 \cup R_2}.$$

Se razona similarmente para $\wedge$ y $\cap$. $\square$

Ejemplo

Supóngase que se tienen dos relaciones R_1, R_2 definidas sobre un conjunto A tales que

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son las representaciones matriciales de $R_1 \cup R_2$ y $R_1 \cap R_2$?

Sol.

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 \vee 1 & 0 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Nótese que las matrices anteriores sólo tienen entradas formadas por 1's y/0's. Tales matrices se llaman **booleanas**.
Para hallar la representación matricial de la composición de relaciones se tiene que hacer el producto booleano de matrices.

Definición

Sean $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ *matrices booleanas de tamaño* $n \times m$ *y* $m \times r$*, respectivamente. Entonces el* **producto booleano** *de* A *con* B *es la matriz* $n \times r$ *denotada* $A \odot B$*, definida por* $A \odot B = (c_{i,j})$ *donde*

$$c_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{m} a_{i,j} \wedge b_{k,j}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r.$$

Ejemplo

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces su producto booleano es

$$\begin{aligned} A \odot B &= \begin{pmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \vee 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propiedad

Sea R una relación de A en B y S una relación de B en C. Entonces la representación matricial de la relación composición $S \circ R$ es

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S.$$

Dem.

Sean $M_{S\circ R} = (\alpha_{i,j})$, $M_R = (\beta_{i,j})$, $M_S = (\gamma_{i,j})$. Para cada entrada $\alpha_{i,j}$ ocurren dos casos:

1. $\alpha_{i,j} = 1$ ó
2. $\alpha_{i,j} = 0$.

1. En este caso $a_i(S \circ R)c_j$. Se deduce entonces, por definición, que existe $b_u \in B$ tal que $a_i R b_u$ y $b_u S c_j$ luego $\beta_{i,u} = 1$ y $\gamma_{u,j} = 1$, por lo que $\beta_{i,u} \wedge \gamma_{u,j} = 1$. Entonces $\bigvee_{k=1}^{m} \beta_{i,k} \wedge \gamma_{k,j} = 1 = \alpha_{i,j}$.
2. En este otro caso $(a_i, c_j) \notin S \circ R$, por lo que $\forall b_u \in B$ ocurre que $a_i \not R b_u$ ó $b_u \not R c_j$. Luego, por definición, $\beta_{i,u} = 0$ ó $\gamma_{u,j} = 0$, i.e., $\beta_{i,u} \wedge \gamma_{u,j} = 0$, para todo $b_u \in B$. En consecuencia $\bigvee_{u=1}^{m} \beta_{i,u} \wedge \gamma_{u,j} = 0 = \alpha_{i,j}$.

En cualquier caso ocurre que $\bigvee_{u=1}^{m} \beta_{i,u} \wedge \gamma_{u,j} = 0 = \alpha_{i,j}$. Por lo tanto

$$M_{S\circ R} = (\alpha_{i,j}) = (\bigvee_{u=1}^{m} \beta_{i,u} \wedge \gamma_{u,j}) = M_R \odot M_S.$$

Ejemplo

Encontrar la matriz que representa la composición $S \circ R$ donde

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.

Tenemos que

$$\begin{aligned} M_{S \circ R} &= M_R \odot M_S \\ &= \begin{pmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Tarea

1. *Represente las siguientes relaciones sobre* $\{1, 2, 3, 4\}$ *con una matriz.*

   1.1 $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

   1.2 $\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)\}$

   1.3 $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2$

   1.4 $\{(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$

2. *Liste los pares ordenados en las relaciones sobre* $\{1, 2, 3\}$ *correspondientes a estas matrices.*

   2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   2.2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tarea

1. *Sean R_1, R_2 relaciones sobre un conjunto A que tienen representaciones matriciales*

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre las matrices que representan

   1.1 $R_1 \cup R_2$
   1.2 $R_1 \cap R_2$
   1.3 $R_2 \circ R_1$
   1.4 $R_1 \circ R_2$