Definición

Sean P, Q conjuntos con conjunto universal E. Se dice que P y Q son **iguales** *si $P \subseteq Q$ y $Q \subseteq P$. En tal caso se escribe $P = Q$. Es decir*

$$P = Q \Leftrightarrow P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P.$$

Ejemplo

$$\{a, a\} = \{a\}$$

pues si $\{a, a\} \subseteq \{a\}$ porque si $x \in \{a, a\}$ entonces $x = a \in \{a\}$; y recíprocamente, $\{a\} \subseteq \{a, a\}$.

Ejemplo

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

pues $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$ pues si $x \in \{a, b\}$ entonces $x = a \vee x = b$ y en cualquiera de estos dos casos $x \in \{b, a\}$; similarmente $\{b, a\} \subseteq \{a, b\}$.

Como puede notarse de los ejemplos, en conjuntos no importan las redundancias, ni el orden de los elementos que las forman.

Tarea

Describir los siguientes conjuntos por extensión:

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 12\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es el cuadrado de un entero y } x < 100\}$
4. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$

Tarea

Describir por comprensión los siguientes conjuntos

1. $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
2. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
3. $\{m, n, o, p\}$

Tarea

Determinar si los siguientes pares de conjuntos son iguales.

1. $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
2. $\{\{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$

Tarea

Supongamos que $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$ *y* $D = \{4, 6, 8\}$. *Determinar cuáles de estos conjuntos son subconjuntos de cuáles.*

Tarea

Determinar si 2 es un elemento del conjunto.

1. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ es entero mayor que 1}\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ es el cuadrado de un entero}\}$
3. $\{2, \{2\}\}$
4. $\{\{2, \{2\}\}\}$
5. $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
6. $\{\{\{2\}\}\}$

Tarea

Determinar si es cierto o falso.

1. $0 \in \varnothing$
2. $\{0\} \subseteq \varnothing$
3. $\varnothing \in \{0\}$
4. $\{0\} \in \{0\}$
5. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
6. $\varnothing \subseteq \{0\}$

Tarea

Determinar si es cierto o falso.

1. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
2. $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
3. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
4. $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$
5. $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Tarea

Determinar cierto o falso

1. $x \in \{x\}$
2. $\{x\} \in \{\{x\}\}$
3. $\{x\} \subseteq \{x\}$
4. $\{x\} \in \{x\}$
5. $\varnothing \subseteq \{x\}$
6. $\varnothing \in \{x\}$

Tarea

Encontrar dos conjuntos A, B tales que

1. $A \subseteq B$
2. $A \in B$.

Tarea

Sean A, B *conjuntos con conjunto universal* E*. Demostrar que si* $2^A = 2^B$ *entonces* $A = B$*.*

Definición

Si P *es un conjunto con conjunto universal* E *entonces el* **complemento** *de* P *es*

$$P^c = \{x \in E \,|\, x \notin P\}$$

es decir, P^c *consta de los elementos que no están en* P*.*

Ejemplo

Sea $E = \{a, e, i, o, u\}$ *y* $P = \{a, e, o\}$*. Entonces* $P^c = \{i, u\}$*.*

Propiedad

Sean A, B conjuntos con conjunto universal E. Entonces

1. $E^c = \varnothing$
2. $\varnothing^c = E$
3. $A^c = B^c \Leftrightarrow A = B$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
5. $A^{cc} = A$

Demostración. 1. Por contradicción: si $E^c \neq \varnothing$ entonces existe $z \in E^c = \{x \in E \mid x \notin E\}$, luego $z \in E$ y $z \notin E$, lo cual es absurdo.

$$\therefore E \neq \varnothing$$

2. Por contenciones, esto es probaremos que

1. $\varnothing^c \subseteq E$;
2. $E \subseteq \varnothing^c$.

1. Esto es porque cualquier conjunto está contenido en el conjunto universal.
2. Checaremos, por definición de contención, que

$$\forall x \in E, x \in E \Rightarrow x \in \varnothing^c$$

en efecto, si $x \in E$ entonces $x \in \varnothing \vee x \notin \varnothing$ (recordemos que $p \vee \neg p$ es una tautología, para cualquier proposición p). El primer caso no se puede dar luego $x \notin \varnothing$, por lo que $x \in \varnothing^c$:

$$\therefore E \subseteq \varnothing^c$$

3. Tarea.
4.

($\Rightarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$. Por demostrar que $B^c \subseteq A^c$ lo cual haremos elemento a elemento: es decir tenemos que checar que

$$\forall x \in E, x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$$

En efecto, si $x \in B^c$ entonces $x \notin B$ luego $x \notin A$, pues en caso contrario $x \in A$ lo cual implicaría $x \in B$ (por hipótesis $A \subseteq B$). Por lo que $x \in A^c$:

$$\therefore B^c \subseteq A^c$$

($\Leftarrow$) Supongamos $B^c \subseteq A^c$. Por demostrar ahora que $A \subseteq B$ lo cual haremos, de nuevo, elemento a elemento, esto es

$$\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Si $x \in A$ entonces $x \in B \vee x \notin B$; si ocurriera lo segundo entonces $x \in B^c$ luego $x \in A^c$ (recordar la hipótesis $B^c \subseteq A^c$) y entonces $x \notin A$ lo que contradeciría nuestra suposición. Por tanto $x \in B$.

$$\therefore A \subseteq B.$$