

Propiedad

Sean P, Q, R conjuntos con conjunto universal E . Entonces

1. $\emptyset \subseteq P$
2. $P \subseteq P$
3. $P \subseteq E$
4. $P \subseteq Q$ y $Q \subseteq R \Rightarrow P \subseteq R$

Dem.

1. Tenemos que demostrar que

$$\forall x \in E, x \in \emptyset \Rightarrow x \in P.$$

La proposición $x \in \emptyset \Rightarrow x \in P$ tiene antecedente falso, luego siempre es verdadera.

2. Se cumple trivialmente que

$$\forall x \in E, x \in P \Rightarrow x \in P$$

3. Tenemos que checar que

$$\forall x \in E, x \in P \Rightarrow x \in E$$

lo cual es obvio.



4. Tenemos que demostrar que

$$\forall x \in E, x \in P \Rightarrow x \in R.$$

lo cual haremos *elemento a elemento*:

si $x \in P$ entonces $x \in Q$ pues $P \subseteq Q$ por hipótesis. Luego $x \in R$ pues $Q \subseteq R$ por hipótesis. Hemos probado que $x \in P \Rightarrow x \in R$;

$$\therefore P \subseteq R.$$

Ejemplo

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$ pues un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo.
2. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ pues el conjunto vacío siempre es subconjunto de cualquier otro conjunto.
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ pues \emptyset que aparece del lado izquierdo está en la descripción del conjunto del lado derecho.
4. $\emptyset \notin \emptyset$ pues el conjunto vacío no tiene elementos.

Definición

$P \not\subseteq Q$ significa que P no es subconjunto de Q .

Ejemplo

1. $\{\emptyset\} \not\subseteq \emptyset$
2. $\{1, 3, 4, 2\} \not\subseteq \{1, 5, 4, 2\}$

Definición

Se dice que \emptyset y P son **subconjuntos impropios** de P ; los otros subconjuntos de P se llaman **propios**.

Definición

Sea Q un conjunto. Se define el conjunto

$$2^Q = \mathcal{P}(Q)$$

como el conjunto de todos los subconjuntos de Q y se llama **conjunto potencia** o **conjunto de partes** de Q .

Que tal colección es realmente un conjunto lo asegura el axioma del conjunto potencia según Zermelo-Fraenkel o bien el axioma W según los axiomas NBG.

Ejemplo

1. Sea $Q = \{a, b, c\}$. Entonces

$$\mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2. Sea $R = \{a\}$. Entonces

$$\mathcal{P}(R) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Definición

Si P es un conjunto con $|P|$ se denota al número de elementos de P y tal se llama la **cardinalidad** del conjunto.

En los ejemplos anteriores

$$|2^Q| = 8 = 2^{|Q|}$$

$$|2^R| = 2 = 2^{|R|}$$

$$|2^{\emptyset}| = 1 = 2^{|\emptyset|}$$

Posteriormente se demostrará que, en general si Q es un conjunto finito entonces

$$|2^Q| = 2^{|Q|}$$

Tarea

¿Cuál es la cardinalidad de estos conjuntos?

1. $\{a\}$
2. $\{a, \{a\}, a\}$
3. $\{\{a, a\}, \{b, b\}\}$
4. $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

Tarea

¿Cuál es la cardinalidad de estos conjuntos?

1. \emptyset
2. $\{\emptyset\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Tarea

Obtener el conjunto potencia de

1. $\{\emptyset\}$
2. $\{a, b\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Tarea

¿Cuántos elementos tiene el conjunto 2^A ?

1. $A = \{a, b, \{a, b\}\}$
2. $A = \{\emptyset, a\}$
3. $A = \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$
4. $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
5. $A = 2^\emptyset$

Tarea

Determinar si alguno de los siguientes es el conjunto potencia de algún conjunto (¿cuál?).

1. \emptyset
2. $\{\emptyset, \{a\}\}$
3. $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$
4. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$