Definición

Un conjunto $(A, \leq)$ *se llama* **retículo** *si*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\text{ existen } \sup\{x, y\} \text{ e } \inf\{x, y\})$$

Ejemplo

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un retículo, pues si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, por tricotomía $x \leq y$ o $y \leq x$:

- Caso $x \leq y$: $\sup\{x, y\} = y$ y $\inf\{x, y\} = x$.
- Caso $y \leq x$: $\sup\{x, y\} = x$ y $\inf\{x, y\} = y$.

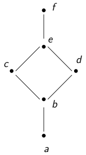
El mismo argumento prueba que

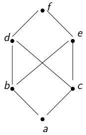
Propiedad

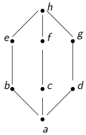
Si $(A, \leq)$ *es totalmente ordenado entonces es un retículo.*

Ejemplo

Considérese los siguientes diagramas de Hasse:

1. 

2. 

3. 

que representan ordenes parciales. Determinar si son retículos.

Sol. Tenemos que mostrar que cada pareja tiene supremo e ínfimo. Pondremos tal información en una tabla. Como $\sup\{x,y\} = \sup\{y,x\}$ sólo llenaremos la mitad de tal tabla.

1. Nótese que $\sup\{a,b\} = b$ pues b, c, d, e, f son cotas superiores y la menor de éstas es b. Similarmente $\sup\{b,e\} = e$:

sup	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b		b	c	d	e	f
c			c	e	e	f
d				d	e	f
e					e	f
f						f

inf	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b		b	b	b	b	b
c			c	b	c	c
d				d	d	f
e					e	e
f						f

Por lo tanto tenemos un retículo.

2. Las cotas superiores de $\{b, c\}$ son: d, e, f y de éstas, para calcular el supremo, debemos tomar la menor, pero d y e no son comparables. Por lo tanto no existe supremo de $\{b, c\}$. Luego no tenemos un retículo.

3.

sup	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b		b	h	h	e	h	h	h
c			c	h	h	f	h	h
d				d	h	h	g	h
e					e	h	h	h
f						f	h	h
g							g	h
h								h

Nótese que las cotas superiores de $\{b, c\}$ son: h. Luego $\sup\{b, c\} = h$.

inf	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b		b	a	a	b	a	a	b
c			c	a	a	c	a	c
d				d	a	a	d	a
e					e	a	a	a
f						f	a	f
g							g	g
h								h

Por lo tanto tenemos un retículo.

Ejemplo

Sea E un conjunto. Determinar si $(2^E, \subseteq)$ es un retículo.

Sol.

Sean $A, B \in 2^E$. Entonces $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$. Probaremos que

1. $\sup\{A, B\} = A \cup B$
2. $\inf\{A, B\} = A \cap B$

1. Sabemos que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, esto es, $A \cup B$ es cota superior del conjunto $\{A, B\}$; probaremos que esta es la mínima cota superior. Supongamos que C es cota superior de $\{A, B\}$. Luego, $A \subseteq C$ y $B \supseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$.

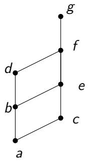
$$\therefore \sup\{A, B\} = A \cup B.$$

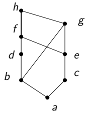
2. Tarea.

Por lo tanto $(2^E, \subseteq)$ es un retículo. $\square$

Tarea

Determinar si los conjuntos parcialmente ordenados con estos diagramas de Hasse son o no retículos.

1. 

2. 

3.