Definición

Sea $(A, \leq)$ *parcialmente ordenado y* $B \subseteq A$. *Los siguientes se llaman* **elementos notables***:*

1. *Un* $k \in A$ *se dice* **cota superior** *de* B *si*
$$(\forall b \in B)(b \leq k)$$
2. *Un* $\ell \in A$ *se dice* **cota inferior** *de* B *si*
$$(\forall b \in B)(\ell \leq b)$$
3. *La más pequeña de las cotas inferiores* M *de* B *se llama* **supremo** *de* B*:*
$$(\forall k \text{ cota superior de } B)(k \leq M).$$
Se pone
$$M = \sup B$$
Si el supremo M *pertenece a* B *entonces* M *se llama* **máximo** *de* B.

4. La más grande de las cotas inferiores m de B se llama **ínfimo** de B:
$$(\forall \ell \text{ cota inferior de } B)(\ell \leq m).$$
Se pone
$$m = \inf B.$$
Si el ínfimo de B pertenece a B éste se llama **mínimo** de B.
5. Un elemento $c \in A$ se dice **maximal** de A si
$$(\forall a \in A)(c \leq a \Rightarrow c = a)$$
6. Un elemento $c \in A$ se dice **minimal** de A si
$$(\forall a \in A)(a \leq c \Rightarrow c = a)$$

Ejemplo

Sea $E = \{a, b, c\}$. Hallaremos elementos notables de $(2, \subseteq)$.
Tenemos que

$$2^X = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

luego tenemos que

$$\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$$

pero también

$$\varnothing \subset \{b\} \subseteq \{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$$

etcétera. Ponemos toda esta información en un diagrama:(ver Figura 1).

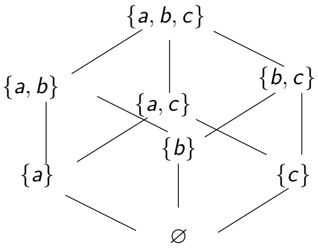


Figura: Diagrama de Hasse de $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

En tal diagrama, una raya de abajo hacia arriba significa $\subseteq$. Luego

- $\{a, b, c\}$ es cota superior de $\{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$
- $\varnothing$ es cota inferior de $\{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

De hecho,

- $\{a, b, c\}$ es cota superior de 2^E
- $\varnothing$ es cota inferior de 2^E
- $\{a, b, c\}$ es máximo de 2^E
- $\varnothing$ es mínimo de 2^E

Mientras que

- $\{a\}$ es minimal de la cadena $\{a\} \subseteq \{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\}$ es maximal de la cadena $\{a\} \subseteq \{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

En un diagrama de Hasse se pone:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d, dash] \\ x \end{tikzcd}$$

para indicar que $x \leq y$; pero se debe de cumplir que

$$\nexists z,\ x \leq z \leq y \text{ con } z \neq x, z \neq y.$$

Ejemplo

Sea $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$. ¿Qué elementos en $(A, |)$ son maximales y cuáles son minimales? ¿Cuáles son cotas superiores, supremo, ínfimo?

Sol.

Calculemos el diagrama de Hasse de $(A, |)$:

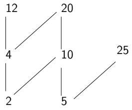


Figura: El diagrama de Hasse de $(\{2, 4, 5, 10, 20, 25\}, |)$.

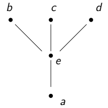
Luego

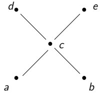
- $12, 20, 25$ son maximales
- $2, 5$ son minimales

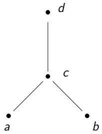
y tal conjunto no tiene cotas superiores ni inferiores, en consecuencia no hay máximos ni mínimos.

Ejemplo

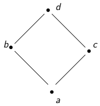
Calcular los máximos y mínimos de los conjuntos parcialmente ordenados representados por su diagrama de Hasse siguientes:

1. 

2. 

3. 

4.



Sol.

1. No hay cotas superiores, luego no hay máximo; a es cota inferior y ésta es la mínima cota inferior (de hecho, la única), por lo que a es el supremo; además a está en el conjunto. Por lo tanto a es mínimo.
2. No hay cotas inferiores, ni superiores; así no hay ni máximos ni mínimos.
3. El elemento d es cota superior y d es la más pequeña de éstas, luego d es máximo; no hay cotas inferiores, luego no hay mínimo.
4. d es máximo, a es mínimo.

Ejemplo

¿Hay máximos o mínimos en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}^*, |)$?

Sol. Tenemos que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(1|n)$$

luego 1 es cota inferior. También es la mayor de las cotas inferiores: pues si m es otra cota inferior entonces se tiene que cumplir

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(m|n)$$

en particular para $n = 1 \in \mathbb{N}^*$:

$$m|1$$

es decir 1 es la mayor de las cotas inferiores:

$$\therefore 1 = \inf \mathbb{N}^*$$

y como $1 \in \mathbb{N}^*$ se sigue que

$$1 = \min \mathbb{N}^*$$

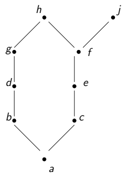
El conjunto ordenado $(\mathbb{N}^*, |)$ no tiene máximo, pues si lo tuviera entonces debería de ser cota superior. Denotemos a esta cota con k. Luego, por definición de cota superior

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n|k)$$

es decir k debe ser múltiplo de todos los enteros positivos, lo que implica $k = 0$ pero $k \notin N^*$, lo que contradice la definición de "máximo" (el máximo debe de estar en el conjunto).

Ejemplo

Considere el diagrama de Hasse



Calcular el ínfimo y el supremo de $A = \{b, d, g\}$.

Sol.

Las cotas superiores de A son: g, h. La menor de éstas es g, luego

$$g = \sup A.$$

Las cotas inferiores de A son: b, a. La mayor es b. Por lo que

$$b = \inf A.$$

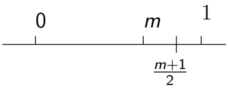
Ejemplo

Sea $A = (0, 1)$ intervalo abierto en $\mathbb{R}$ con orden parcial $\leq$.
Calcular $\sup A$ e $\inf A$.

Sol. Si $x \in A$ entonces $x \leq 1$. Luego 1 es cota superior. Probaremos que es la menor cota inferior. Sea m otra cota inferior de A. Entonces

$$(\forall x \in A)(x \leq m) \tag{1}$$

en particular para $x = .5 \in A$ tenemos que $.5 \leq m$, por lo que $m > 0$. Queremos demostrar que $1 \leq m$. Si ocurriera lo contrario: $1 > m$, luego



el número $(m+1)/2$ es tal que

$$0 < m < \frac{m+1}{2} < 1 \tag{2}$$

de donde $(m+1)/2 \in A$, entonces, según (1),

$$\frac{m+1}{2} \leq m$$

lo que contradice (2).
Por lo tanto $1 \leq m$.

$$\therefore 1 = \sup A.$$

Similarmente $0 = \inf A$ (tarea).

Ejemplo

Hallar el ínfimo y supremo, si existen, de $\{3, 9, 12\}$ en $(\mathbb{N}^*, |)$.

Sol.

1. Ínfimo: una cota inferior m es un número tal que

$$m|3, \quad m|9 \text{ y } m|12$$

Como los divisores positivos de 3 son $1, 3$, los de 9 son $1, 3, 9$ y los de 12 son $1, 2, 3, 4, 6$ entonces

$$m = 1 \vee m = 3$$

Pero como $1|3$, 3 es la mayor cota inferior:

$$\therefore 3 = \inf\{3, 9, 12\}.$$

2. Supremo: una cota superior es un número m tal que

$$3|m, \quad 9|m \text{ y } 12|m.$$

Es decir m es un múltiplo común de $3, 9, 12$. Tales deben de ser múltiplos de 36, esto es $36|m$; luego 36 es la menor cota superior:

$$36 = \sup\{3, 9, 12\}.$$

Si $s = \sup B$ entonces se debe de cumplir que

$$(\forall k \text{ cota superior de } B)(s \leq k).$$

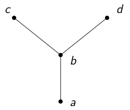
En particular, el supremo siempre tiene que estar relacionado con todas las cotas superiores.
Similarmente para el ínfimo.

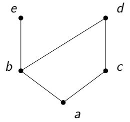
Tarea

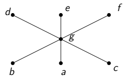
1. *Dibujar el diagrama de Hasse de la relación "mayor o igual" en el conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
2. *Dibujar el diagrama de Hasse de la relación de divisibilidad en el conjunto*
   - 2.1 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - 2.2 $\{3, 5, 7, 11, 13, 16, 17\}$
   - 2.3 $\{2, 3, 5, 10, 11, 15, 25\}$
   - 2.4 $\{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$
3. *Dibujar el diagrama de Hasse de* $(2^S, \subseteq)$ *con* $S = \{a, b, c, d\}$.

Tarea

Enumerar todos los pares ordenados de cada uno de los órdenes parciales que corresponden a los diagramas de Hasse que se muestran.

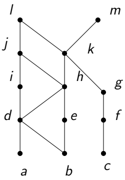
1. 

2. 

3. 

Tarea

Considerar el siguiente diagrama de Hasse:



1. *Hallar los elementos maximales.*
2. *Hallar los elementos minimales.*
3. *¿Hay máximo?*
4. *¿Hay mínimo?*
5. *Hallar todas las cotas superiores de* $\{a, b, c\}$
6. *Hallar el supremo de* $\{a, b, c\}$, *si es que existe.*
7. *Hallar todas las cotas inferiores de* $\{f, g, h\}$
8. *Hallar el ínfimo de* $\{f, g, h\}$, *si es que existe.*

Tarea

Considérese el conjunto parcialmente ordenado

$$(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$$

1. *Hallar los elementos maximales.*
2. *Hallar los elementos minimales.*
3. *¿Hay máximo?*
4. *¿Hay mínimo?*
5. *Hallar todas las cotas superiores de* $\{3, 5\}$
6. *Hallar el supremo de* $\{3, 5\}$, *si es que existe.*
7. *Hallar todas las cotas inferiores de* $\{15, 45\}$
8. *Hallar el ínfimo de* $\{15, 45\}$, *si es que existe.*

Tarea

Considerar el conjunto parcialmente ordenado

$$(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$$

1. *Hallar los elementos maximales.*
2. *Hallar los elementos minimales.*
3. *¿Hay máximo?*
4. *¿Hay mínimo?*
5. *Hallar todas las cotas superiores de* $\{2, 9\}$
6. *Hallar el supremo de* $\{2, 9\}$, *si es que existe.*
7. *Hallar todas las cotas inferiores de* $\{60, 72\}$
8. *Hallar el ínfimo de* $\{60, 72\}$, *si es que existe.*

Tarea

Considérese el conjunto

$$(P, \subseteq)$$

donde

$$P = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

1. *Hallar los elementos maximales.*
2. *Hallar los elementos minimales.*
3. *¿Hay máximo?*
4. *¿Hay mínimo?*
5. *Hallar todas las cotas superiores de* $\{\{2\}, \{4\}\}$
6. *Hallar el supremo de* $\{\{2\}, \{4\}\}$*, si es que existe.*
7. *Hallar todas las cotas inferiores de* $\{\{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$.
8. *Hallar el ínfimo de* $\{\{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$*, si es que existe.*

Tarea

Hallar un conjunto parcialmente ordenado que

1. *tenga un elemento minimal y que no tenga ningún elemento maximal.*
2. *tenga un elemento maximal y no tenga ningún elemento minimal.*
3. *no tenga ni elementos maximales ni minimales.*