

Relaciones de Orden. Retículos

Definición

1. Una relación R sobre el conjunto A se dice de **orden** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En tal caso R se escribe como \leq y al par (A, \leq) se le llama **conjunto (parcialmente) ordenado**.
2. Si (A, \leq) es conjunto parcialmente ordenado como en el inciso anterior y $a, b \in A$, entonces

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b \\ &\Leftrightarrow aRb \wedge a \neq b \end{aligned}$$

Ejemplo

La relación S en \mathbb{R} dada por

$$xSy \Leftrightarrow x \leq y$$

es un orden pues

1. reflexiva: $(\forall x \in \mathbb{R}), xSx$ pues $x \leq x$
2. antisimétrica: si xSy y ySx entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.
3. transitiva: si xSy y ySz entonces $x \leq y$ y $y \leq z$ luego $x \leq z$.

Ejemplo

Sea E un conjunto. Se define la relación en 2^E por

$$ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$$

R es un orden pues:

1. reflexiva: $\forall A \subset E, A \subseteq A$
2. antisimétrica: si ARB y BRA entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$ según la definición de igualdad de conjuntos.
3. transitiva: si ARB y BRC entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces, por propiedad anterior $A \subseteq C$, i.e., ARC .

Definición

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Ejemplo

En \mathbb{N}^* se define la relación

$$aSb \Leftrightarrow a|b$$

entonces S es un orden:

1. reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}^* a|a$ luego aSa .
2. antisimétrica:

$$aSb \wedge bSa \Rightarrow a|b \wedge b|a$$

$\Rightarrow b$ es múltiplo de a y a lo es de b

$\Rightarrow b = k_1a \wedge a = k_2b$ para ciertos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b = k_1k_2b$ sustituyendo a en la primer ecuación

$$\Rightarrow k_1k_2 = 1$$

$$\Rightarrow k_1 = 1 = k_2 \vee k_1 = -1 = k_2$$

si ocurriera lo segundo entonces $a = -b < 0$ lo cual es absurdo pues $a \in \mathbb{N}^*$. Por tanto el segundo caso es

imposible. Luego $k_1 = 1 = k_2$ lo que implica $a = b$.

3. transitiva:

$$aSb \wedge bSc \Rightarrow a|b \wedge b|c$$

$$\Rightarrow b = k_1a \wedge c = k_2b \text{ para ciertos } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{sustituyendo } b \text{ en la segunda ecuación: } c = k_2k_1a$$

$$\Rightarrow c = k_3a \text{ con } k_3 = k_2k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a|c$$

$$\Rightarrow aSc$$

Tarea

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son parcialmente ordenados?

Demuestre.

1. $(\mathbb{Z}, =)$
2. (\mathbb{Z}, \geq)
3. (\mathbb{Z}, \neq)
4. $(\mathbb{Z}, |)$

Definición

Sea (A, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que (A, \leq) está **totalmente ordenado** o **orden lineal** si

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \leq y \vee y \leq x)$$

Ejemplo

(\mathbb{R}, \leq) es totalmente ordenado.

Ejemplo

$(\mathbb{N}^*, |)$ no es totalmente ordenado pues existen $2, 3 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$2 \nmid 3 \text{ y } 3 \nmid 2$$

Ejemplo

Si $X = \{a, b, c\}$, entonces $(2^X, \subseteq)$ no es totalmente ordenado pues

$$\{a\} \not\subseteq \{b\} \text{ ni } \{b\} \not\subseteq \{a\}$$

Tarea

Encontrar dos elementos no comparables en

1. $(2^{\{0,1,2\}}, \subseteq)$
2. $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, |)$