Ejemplo

En $\mathbb{Q}$ se define la relación

$$xRy \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3y+h}{3}.$$

1. Demostrar que R es de equivalencia.
2. Hallar la clase de $2/3$.

Sol.
1.

1. Reflexiva: notemos que

$$xRx \Leftrightarrow x = \frac{3x+h}{3} \Leftrightarrow h = 0$$

luego $\forall x \in \mathbb{Q}$, xRx pues existe $h = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \frac{3x+0}{3}$

2. Simétrica:

$$\begin{aligned} xRy &\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3y+h}{3} \\ &\Rightarrow 3x = 3y + h \\ &\Rightarrow \frac{3x-h}{3} = y \\ &\Rightarrow y = \frac{3x+(-h)}{3} \text{ con } -h \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow yRx \end{aligned}$$

3. Transitiva: si xRy y yRz, por demostrar xRz. Tenemos

$$x = \frac{3y+h_1}{3} \text{ y } y = \frac{3z+h_2}{3}$$

sustituyendo y dado por la segunda ecuación en la primera:

$$x = \frac{3\frac{3z+h_2}{3} + h_1}{3} = \frac{(3z+h_2)+h_1}{3}$$

entonces

$$x = \frac{3z+(h_1+h_2)}{3}$$

con $h_1 + h_2 \in \mathbb{Z}$. Lo que implica xRz.

2. Por definición de clase

$$[2/3] = \{x \in \mathbb{Q} \mid xR(2/3)\}$$

pero

$$xR(2/3) \Leftrightarrow x = \frac{3(2/3) + h}{3} = \frac{2 + h}{3}$$

con $2 + h \in Z$. Pero $h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2 + h \in \mathbb{Z}$; por lo que podemos renombrar $h' = h + 2$ y escribir

$$\begin{aligned} [2/3] &= \{z \in \mathbb{Q} \mid z = h'/3 \text{ con } h' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, -3/3, -2/3, -1/3, 0, 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, \dots\} \end{aligned}$$

Propiedad

Sea R una relación de equivalencia sobre A y $a, b \in A$ cualesquiera.

$$[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$$

Dem.

($\Rightarrow$) Supongamos que $[a] = [b]$. Por la propiedad reflexiva $a \in [a] = [b]$ luego $a \in [b] = \{x \in A \mid xRa\}$ entoncesaRb.

($\Leftarrow$) Supongamos aRb. Por demostrar $[a] = [b]$, lo cual haremos por contenciones:

1. $[a] \subseteq [b]$: si $z \in [a]$ entonces zRa, pero como por hipótesis aRb entonces zRb por transitiva. Luego $z \in [b]$.
2. $[b] \subseteq [a]$: si $z \in [b]$ entonces zRb, pero bRa por simétrica, luego, por transitiva, zRa; lo que implica $z \in [a]$

$\square$

Propiedad

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces las clases de equivalencia constituyen una partición de A. Esto es:

1. $\bigcup_{a\in A}[a] = A$
2. *si* $[a] \neq [b]$ *entonces* $[a] \cap [b] = \varnothing$.

1. Por contenciones:

$\subseteq$: Como cada clase se forma con conjunto universal A, tenemos que $(\forall a \in A)\,[a] \subseteq A$, luego

$$\bigcup_{a\in A}[a] \subseteq A.$$

$\supseteq$: si $z \in A$ entonces zRz por reflexiva, luego $z \in [z]$ por lo que

$$z \in \bigcup_{a\in A}[a].$$

Por lo tanto $A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]$.

$$\therefore \bigcup_{a \in A} [a] = A$$

2. Por contrarrecíproca, tal propiedad es equivalente a

$$[a] \cap [b] \neq \varnothing \Rightarrow [a] = [b]$$

demostraremos ésta.
Si $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ entonces $\exists z \in [a] \cap [b]$, esto es $z \in [a]$ y $z \in [b]$; por lo que zRa y zRb. Luego por simétrica aRz y zRb y entonces, por transitiva aRb lo que implica $[a] = [b]$.

Ejemplo

Consideremos la relación de equivalencia llamada congruencia módulo 4 sobre $\mathbb{Z}$. Entonces

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$$

y

$$\begin{aligned} [0] \cap [1] &= \varnothing & \qquad [1] \cap [2] &= \varnothing \\ [0] \cap [2] &= \varnothing & \qquad [1] \cap [3] &= \varnothing \\ [0] \cap [3] &= \varnothing & \qquad [2] \cap [3] &= \varnothing \end{aligned}$$

Definición

Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

se llama **conjunto cociente**.

Ejemplo

En el ejemplo inmediato anterior,

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{[0],[1],[2],[3]\}$$

Ejemplo

Si consideramos ahora la congruencia módulo 2 en los enteros obtenemos

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{[0],[1]\}$$

donde $[1]$ *es el conjunto de enteros impares y* $[0]$ *es el conjunto de enteros pares.*

Ejemplo

Sea la relación en $A = \{1,2,3,4\}$:

$$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3)\}$$

S es una relación de equivalencia. Entonces el conjunto cociente está formado por

$$[1] = \{1\}, \quad [2] = \{2\}, \quad [3] = \{3\}, \quad [3] = 3,4 = [4]$$

luego,

$$A/S = \{[1],[2],[3]\} = \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$$

Ejemplo

Sea $X = \{a, b, c\}$. Definimos una relación de equivalencia en el conjunto potencia 2^X mediante $(A, B \in 2^X)$:

$$ARB \Leftrightarrow A \cap \{a, c\} = B \cap \{a, c\}.$$

Evidentemente R es de equivalencia. Calculemos el conjunto cociente $2^X/R$. Primero recordemos que

$$2^X = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

entonces, por definición de clase

$$\begin{aligned}
[\varnothing] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a, c\} = \underbrace{\varnothing \cap \{a, c\}}_{\varnothing}\} \\
&= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a, c\} = \varnothing\} \\
&= \{\varnothing, \{b\}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\{a\}] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \underbrace{\{a\} \cap \{a,c\}}_{\{a\}}\} \\
&= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \{a\}\} \\
&= \{\{a\}, \{a,b\}\}
\end{aligned}
$$

$$[\{b\}] = [\{a\}]$$

pues $\{b\}R\{a\}$;

$$
\begin{aligned}
[\{c\}] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \{c\}\} \\
&= \{\{c\}, \{b,c\}\}
\end{aligned}
$$

$$[\{a,b\}] = [\{a\}]$$

pues $\{a,b\}R\{a\}$.

$$
\begin{aligned}
[\{a,c\}] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \{a,c\}\} \\
&\{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$[\{b, c\}] = [\{c\}] \text{ y } [\{a, b, c\}] = [\{a, c\}]$$

pues $\{b, c\}R\{c\}$ y $\{a, b, c\}R\{a, c\}$. Por tanto, el conjunto cociente es

$$2^X/R = \{[\varnothing], [\{a\}], [\{c\}], [\{a, c\}]\}$$