2.2.2 Equivalencia y substitución

Observación 21 Se hará uso del conectivo $\leftrightarrow$, estableciendo que $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ representa $\sim ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \sim (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$, con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbcs de $\mathcal{L}$.

Proposición 34 Para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\vdash_K (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ sii $\vdash_K (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ y $\vdash_K (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$.

Definición 32 Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbcs de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *deductivamente equivalentes (deq)*.

Corolario 7 La relación deq entre fbcs es una relación de equivalencia.

Proposición 35 Si x_i ocurre libre en $\mathcal{A}(x_i)$ y x_j es una variable que no ocurre en $\mathcal{A}(x_i)$, entonces: $\vdash_K (\forall x_i)\mathcal{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathcal{A}(x_j)$

Proposición 36 Sea $\mathcal{A}$ una fbc de $\mathcal{L}$ cuyas variables libres son $y_1, \ldots, y_n$, entonces $\vdash_K \mathcal{A}$ sii $\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathcal{A}$.

Definición 33 Si $\mathcal{A}$ contiene como variables libres solamente a $y_1, \ldots, y_n$, entonces $(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathcal{A}$ se llama la *cerradura universal* de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$.

Ejercicio 35 Diga por qué una fbc y su cerradura universal no son deq.

Proposición 37 Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbcs de $\mathcal{L}$, y supongamos que $\mathcal{B}_0$ es el resultado de substituir cada ocurrencia de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}_0$, entonces $\vdash_K (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})' \to (\mathcal{A}_0 \leftrightarrow \mathcal{B}_0)$.

Corolario 8 Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_0$ y $\mathcal{B}_0$ como en la proposición anterior. Si $\vdash_K (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ entonces $\vdash_K (\mathcal{A}_0 \leftrightarrow \mathcal{B}_0)$

Corolario 9 Si x_j no ocurre en $\mathcal{A}(x_i)$ y $\mathcal{B}_0$ es el resultado de reemplazar cada ocurrencia de $(\forall x_i)\mathcal{A}(x_i)$ por $(\forall x_j)\mathcal{A}(x_j)$ en $\mathcal{A}_0$, entonces $\vdash_K (\mathcal{A}_0 \leftrightarrow \mathcal{B}_0)$.

Ejercicio 36

1. Demuestre que, para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $(\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\forall x_i)\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B})$.
2. Para cualquier fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$, pruebe que: $\sim (\exists x_i)\mathcal{A}$ y $(\forall x_i) \sim \mathcal{A}$ son deq.
3. Demuestre que: $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K (\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(x_2, x_3)$.

2.2.3 Forma normal prenex

Proposición 38 Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbcs de $\mathcal{L}$.

i Si x_i no ocurre libre en $\mathcal{A}$, entonces

$$\vdash_K (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B}) \tag{6}$$

y

$$\vdash_K (\exists x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \to (\exists x_i)\mathcal{B}). \tag{7}$$

ii Si x_i no ocurre libre en $\mathcal{B}$, entonces

$$\vdash_K (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \tag{8}$$

y

$$\vdash_K (\exists x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\forall x_i)\mathcal{A} \to \mathcal{B}). \tag{9}$$

Observación 22 Usaremos las fbcs de la proposición anterior como justificación en la equivalenecia de una fbc con otra. Por ejemplo, las fbcs:
$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)$ y
$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$ son deqs:

$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)$	fbc original
$(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$	9
$(\exists x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \to (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$	6
$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$	7

Definición 34 Una fbc $\mathcal{A}$ está en la *forma normal prenex (fnp)* si tiene la forma: $(Q_1 x_{i_1})\ldots(Q_k x_{i_k})\mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es una fbc de $\mathcal{L}$ que no contiene cuantificadores, y Q_j es $\forall$ o $\exists$.

Proposición 39 Para cualquier fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$, existe una fbc $\mathcal{B}$ en forma normal prenex que es deq a $\mathcal{A}$.

Ejercicio 37 Encontrar una fbc en fnp y deq a:

1. $A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$.
2. $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to ((\exists x_2)A_1^1(x_2) \to (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$.
3. $(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^1(x_1) \to \sim (\exists x_3)A_1^2(x_1, x_3))$.

2.2.4 Propiedades de $K_{\mathcal{L}}$

Definición 35 Una *extensión* de K es un sistema formal obtenido por la modificación o incremento de sus axiomas, de tal manera que todos los teoremas de K lo siguen siendo en la extensión. Dadas dos extensiones de K una es extensión de la otra, si la clase de teoremas de la primera contiene a la de la segunda.

Definición 36 Un *sistema de primer orden* es una extensión de $K_{\mathcal{L}}$, para algún lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$.

Definición 37 Un sistema de primer orden S es *consistente* si para ninguna fbc $\mathcal{A}$, ambas $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ son teoremas de S.

Proposición 40 Sea S un sistema de primer orden consistente, $\mathcal{A}$ una fbc cerrada que no es teorema de S, y S^* la extensión de S por aumentar $\sim \mathcal{A}$ como axioma a S. Entonces S^* es consistente.

Definición 38 Un sistema de primer orden S es *completo* si para cada fbc $\mathcal{A}$ se tiene $\vdash_S \mathcal{A}$ o bien $\vdash_S \sim \mathcal{A}$.

Observación 23 Ni $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ ni su negación son teoremas de K. Por tanto, K no es completo.

Proposición 41 Dado un sistema de primer orden consistente, S, existe una extensión consistente de S que es completa.

Observación 24 Sea S una extensión consistente de $K_{\mathcal{L}}$. Sea $\mathcal{L}^+$ el nuevo lenguaje que se obtiene por agregar a $\mathcal{L}$ los símbolos constantes $b_0, b_1, \ldots$, con lo cual se podrán crear nuevos términos y fbcs que no tenía $\mathcal{L}$. K^+ y S^+ representarán los nuevos sistemas que usan $\mathcal{L}^+$ derivados de K y S. S^+ es consistente, ya que si $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ fueran teoremas de S^+, podríamos substituir las constantes (del conjunto $b_0, b_1, \ldots$) que ocurren en ellos y sus demostraciones, por constantes de $\mathcal{L}$. Esto haría a S inconsistente. Por tanto, S^+ es consistente.

Lema 1 Sean $\mathcal{L}^+$, K^+ y S^+ como en la observación anterior. Y sea $\mathcal{F}_0(x_{i0}), \mathcal{F}_1(x_{i1}), \ldots$, la lista de todas las fbcs de $\mathcal{L}^+$ cuyos miembros contienen sólo una variable libre (esta enumeración se realiza de la misma forma en que se enumeran las fórmulas para construcciones semejantes), con las x_{iq}'s no necesariamente diferentes. Elijamos de la secuencia $b_0, b_1, \ldots$, la subsecuencia $c_0, c_1, \ldots$, tal que