(b) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son lógicamente válidas, entonces $\mathcal{B}$ es lógicamente válida.

(c) Si $\mathcal{A}$ es lógicamente válida, entonces $(\forall x_i)\mathcal{A}$ es lógicamente válida, siendo x_i cualquier variable.

(d) $(\forall x_i)\mathcal{A} \to (\exists x_i)\mathcal{A}$ es lógicamente válida.

6. Si t es un término que es libre para x_i en $\mathcal{A}(x_i)$, entonces $\mathcal{A}(t) \to (\exists x_i)\mathcal{A}(x_i)$ es lógicamente válida.

2.2 Cálculo formal de predicados

2.2.1 El sistema formal $K_{\mathcal{L}}$

Definición 29 El *sistema formal* K, o $K_{\mathcal{L}}$, del *cálculo de predicados* es un sistema deductivo definido con base en:

1. El *lenguaje* $\mathcal{L}$. El *alfabeto* de símbolos, $(\forall, \sim, \to, (,), A_1^1, \ldots, f_1^1, \ldots, a_1, \ldots, x_1, \ldots)$, el conjunto de *términos* de $\mathcal{L}$, y el conjunto de *fórmulas bien contruidas* (fbcs).
2. *Axiomas.* Hay un número infinito de axiomas, los cuales se generan por los siguientes *esquemas de axioma.* Cada esquema considera cualesquier fbcs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$:

   K1 $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.

   K2 $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$.

   K3 $(((\sim \mathcal{A}) \to (\sim \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.

   K4 $((\forall x_i)\mathcal{A} \to \mathcal{A})$, si x_i no ocurre libre en $\mathcal{A}$.

   K5 $((\forall x_i)\mathcal{A}(x_i) \to \mathcal{A}(t))$, si t es un término de $\mathcal{L}$ que es libre para x_i en $\mathcal{A}(x_i)$.

   K6 $(\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B})$, si $\mathcal{A}$ no contiene ocurrencias libres de la variable x_i.

3. *Reglas de deducción.*

   MP (*modus ponens*) De $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, deducimos $\mathcal{B}$, para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$.

   G (*generalización*) A partir de $\mathcal{A}$ deducimos $(\forall x_i)\mathcal{A}$, para cualquier fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ y cualquier variable x_i.

Definición 30 Una *demostración* en K es una secuencia de fbc's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ tal que para cada i $(1 \leq i \leq n)$, o bien $\mathcal{A}_i$ es un axioma de K, o $\mathcal{A}_i$ se deduce a partir de miembros previos de la secuencia. El miembro $\mathcal{A}_n$ de la secuencia se llama *teorema* de K: $\vdash_K \mathcal{A}_n$.

Definición 31 Sea Γ cualquier conjunto de fbc de $\mathcal{L}$. Una secuencia de fbc's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ es una *deducción a partir de* Γ si para cada i $(1 \leq i \leq n)$ se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{A}_i$ es un axioma de K.
2. $\mathcal{A}_i$ es un miembro de Γ.
3. $\mathcal{A}_i$ se deduce a partir de miembros anteriores de la secuencia.

Expresamos con $\Gamma \vdash_K \mathcal{A}_n$ que $\mathcal{A}_n$ es *deducible a partir* de Γ.

Proposición 28 Si $\mathcal{A}$ es una tautología de $\mathcal{L}$, entonces $\vdash_K \mathcal{A}$.

Proposición 29 Cualquier instancia de **K4**, **K5**, y **K6** es lógicamente válida.

Proposición 30 (Teorema de solidez) Si $\vdash_K \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es lógicamente válida.

Proposición 31 K es consistente (para ninguna fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ sucede que $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ sean teoremas de K).

Observación 19 La fórmula $\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{A}$, no es lógicamente válida. Ha de existir, entonces, una interpretación para la cual no todas las valuaciones la satisfacen; existe, en alguna interpretación, una valuación para la que no se satisface. Sea $\mathbb{Z}$ el dominio de interpretación, y tomemos a $\mathcal{A}$ como la fórmula atómica $A_1^1(x_i) \doteq (x_i = 0)$. Claramente, la valuación v que asigna a x_i cero, satisface a $\mathcal{A}$, pero cualquier valuación equivalente-i a v (diferente a v) no satisfará a $\mathcal{A}$, esto es, la valuación v no satisface a $(\forall x_i)\mathcal{A}$. Así, existe una valuación que no satisface $\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{A}$ en la interpretación dada.

Notemos, sin embargo, que $\mathcal{A} \vdash_K (\forall x_i)\mathcal{A}$ se cumple, por generalización. El teorema de la deducción para K refleja este hecho.

Proposición 32 (Teorema de la deducción) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbcs de $\mathcal{L}$ y Γ un conjunto de fbcs de $\mathcal{L}$. Si $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_K \mathcal{B}$, y esta deducción no contiene la aplicación de **G** para alguna variable libre de $\mathcal{A}$, entonces $\Gamma \vdash_K (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.

Corolario 5 Si $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_K \mathcal{B}$, y $\mathcal{A}$ es cerrada, entonces $\Gamma \vdash_K (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.

Corolario 6 Para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$, $\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_K (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$.

Proposición 33 Supongamos que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y los miembros de Γ son fbcs de $\mathcal{L}$, y que $\Gamma \vdash_K (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, entonces $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_K \mathcal{B}$.

Observación 20 El recíproco de **K**6 es un teorema de K:

$\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B}$	premisa
$(\forall x_i)\mathcal{B} \to \mathcal{B}$	x_i no ocurre libre en $\mathcal{B}$, **K4**, o bien **K5**
$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	SH
$(\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$	**G**

Tenemos entonces que $\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B} \vdash_K (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$. Y podemos aplicar el teorema de la deducción, puesto que la generalización realizada no fue sobre una variable libre de $\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B}$, ($x_i$ tampoco ocurre libre en $\mathcal{A}$). Por tanto, $\vdash_K (\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B}) \to (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.

Ejercicio 34 Demuestre que:

1. $\vdash_K (\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1))$.
2. $\vdash_K (\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B}) \to (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, si x_i no ocurre libre en $\mathcal{A}$.
3. $\vdash_K (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\exists x_i)\mathcal{A} \to (\exists x_i)\mathcal{B})$.
4. $\vdash_K (\exists x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\forall x_i)\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, mientras x_i no ocurra libre en $\mathcal{B}$.
5. $\vdash_K ((\exists x_i)\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, mientras x_i no ocurra libre en $\mathcal{B}$.