Ejercicio 29 Considere una interpretación I, donde D_I es el conjunto de números racionales positivos, diga si habría una interpretación adecuada para la fbc: $(\forall x_1)(\forall x_2) \sim (\forall x_3)(\sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2))$. Asimismo, encuentre más de una interpretación no numérica para la fbc $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1, x_2) \wedge A_1^2(x_2, x_3) \rightarrow A_1^2(x_1, x_3))$ y también para $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A(x_2, x_1))$.

Definición 21 Una *valuación* en I es una función v del conjunto de términos de $\mathcal{L}$ al conjunto D_I que cumple:

1. $v(a_i) = \bar{a}_i$, para cada constante $a_i \in \mathcal{L}$.
2. $v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$, donde f_i^n es cualquier símbolo función de $\mathcal{L}$, y $t_1, \ldots, t_n$ cualesquier términos de $\mathcal{L}$.

Observación 14

1. Una valuación asigna objetos del dominio a los elementos de $\mathcal{L}$ para poder realizar una interpretación en $\mathcal{L}$.
2. Dada una interpretación I, pueden definirse diversas valuaciones.
3. Ya que D_I es el dominio sobre el cual toman valores las variables de $\mathcal{L}$, una valuación v quedará completamente especificada si se define $v(x_1), v(x_2) \ldots$.

Definición 22 Dos valuaciones v y v' son *equivalentes-i* si $v(x_j) = v'(x_j)$, para toda $j \neq i$.

Definición 23 Sea $\mathcal{A}$ una fbc de $\mathcal{L}$ e I una interpretación de $\mathcal{L}$. Se dice que una valuación v en I *satisface* a $\mathcal{A}$ con base en el cumplimiento de:

1. v satisface la fórmula atómica $A_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ sii $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \in \bar{A}_j^n \subset D_I^n$.
2. v satisface $\mathcal{B}$ sii v no satisface $\sim \mathcal{B}$.
3. v satiface $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ sii v satisface $\sim \mathcal{B}$, o bien v satisface $\mathcal{C}$.
4. v satisface $(\forall x_i)\mathcal{B}$ sii para cada valuación equivalente-i v' satisface a $\mathcal{B}$.

Observación 15 La satisfacción de $(\forall x_i \mathcal{B})$ de la definición anterior puede explicarse por el hecho de que la valuación v satisfaga $\mathcal{B}$, y además cambiando ésta por otra equivalente-i siga cumpliendo $\mathcal{B}$, esto es que "para toda $y \in D_I$ ...", siendo y la interpretación de x_i por v.

Ejercicio 30 ¿Por qué para toda valuación v y fbc $\mathcal{A}$, v satisface $\mathcal{A}$ o bien v satisface $\sim \mathcal{A}$?

Ejercicio 31 Para la interpretación N, la aritmética de números naturales referida al inicio de la subsección anterior, diga:

1. ¿Qué valuación daría a las variables para que la fbc $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_3, x_4))$ se satisficiera?
2. ¿Cuáles valuaciones satisfacen la fbc $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$, y cuáles a $(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_2, x_1))$.

Proposición 20 Sea $\mathcal{A}(x_i)$ una fbc de $\mathcal{L}$ en la cual x_i ocurre libre, y sea t un término el cual es libre para x_i en $\mathcal{A}(x_i)$. Suponga que v es una valuación, $v'(x_i) = v(t)$, y v' es equivalente-i a v, entonces v satisface $\mathcal{A}(t)$ sii v' satisface $\mathcal{A}(x_i)$.

Definición 24 Una fbc $\mathcal{A}$ es *verdadera* en una interpretación I si para toda valuación $\mathcal{A}$ se satisface ($I \vDash \mathcal{A}$). $\mathcal{A}$ es *falsa* si no hay valuación en I que satisfaga a $\mathcal{A}$.

Observación 16 De acuerdo a la definición de valuación y fbc verdadera, una fbc $\mathcal{A}$ es falsa sii $\sim \mathcal{A}$ es verdadera. Por tanto, ninguna fbc y su negación son ambas verdaderas.

Proposición 21 Si para una interpretación I, $I \vDash \mathcal{A}$ y $I \vDash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, entonces $I \vDash \mathcal{B}$.

Ejercicio 32 Pruebe que en una interpretación I, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es falsa sii $\mathcal{A}$ es verdadera y $\mathcal{B}$ es falsa.

Proposición 22 Sea $\mathcal{A}$ una fbc de $\mathcal{L}$ e I una interpretación de $\mathcal{L}$. Entonces, para cualquier variable x_i, $I \vDash \mathcal{A}$ sii $I \vDash (\forall x_i)\mathcal{A}$.

Proposición 23 Sean $y_1, \ldots, y_n$ variables de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ una fbc de $\mathcal{L}$, e I una interpretación. Entonces $I \vDash \mathcal{A}$ sii $I \vDash (\forall y_1) \ldots (\forall y_n)\mathcal{A}$.

Proposición 24 En una interpretación I una valuación v satisface $(\exists x_i)\mathcal{A}$ sii existe una valuación v' equivalente-i a v que satisface $\mathcal{A}$.

Definición 25 Una fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es una *instancia de substitución* de una fbc $\mathcal{A}_0$ de L si al reemplazar sistemáticamente cada variable proposicional de $\mathcal{A}_0$, por una fbc de $\mathcal{L}$, obtenemos $\mathcal{A}$.

Observación 17 Notemos que:

1. Una fbc de $\mathcal{L}$ puede ser instancia de substitución de varias fbcs de L: la fbc $\sim (\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow ((\forall x_2)A_2^2(x_1, x_2) \rightarrow (A_1^1(x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_3^1(x_1)))$ es una instancia de substitución de las fbc de $L \sim p_1 \rightarrow p_2$ y $\sim p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)$.
2. La fbc $(\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$ de $\mathcal{L}$ es una instancia de susbstitución de la fbc $p_1 \rightarrow p_1$ de L.

Definición 26 Una fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es una *tautología* si es una instancia de substitución de una tautología en L.

Definición 27 Una fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es *lógicamente válida* si $I \vDash \mathcal{A}$ en cada I de $\mathcal{L}$. $\mathcal{A}$ es *contradictoria* si es falsa en toda interpretación.

Proposición 25 Si $\mathcal{A}$ es una tautología de $\mathcal{L}$, entonces $I \vDash \mathcal{A}$, para toda I.

Proposición 26 Sea I una interpretación de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$ una fbc de $\mathcal{L}$. Si v y w son valuaciones tales que $v(x_i) = w(x_i)$ para cada variable libre x_i de $\mathcal{A}$, entonces v satisface $\mathcal{A}$ sii w satisface $\mathcal{A}$.

Definición 28 Una fbc $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ se dice *cerrada* si no ocurren variables libres en $\mathcal{A}$.

Proposición 27 Si $\mathcal{A}$ es una fbc cerrada de $\mathcal{L}$ e I es una interpretación de $\mathcal{L}$, entonces $I \vDash \mathcal{A}$ o bien $I \vDash \sim \mathcal{A}$.

Observación 18 La clase de fbcs lógicamente válidas contiene a las tautologías.

Ejercicio 33

1. Sea I una interpretación, v equivalente-i con v'. Si v' satisface $\mathcal{A}$, y x_i no ocurre libre en $\mathcal{A}$, entonces v satisface $\mathcal{A}$.
2. En la interpretación N, dé una valuación que satisfaga y otra que no satisfaga a la fbc: $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$.
3. Sea I la interpretación con dominio $\mathbb{Z}$, y la interpretación de los símbolos: a_1 como 0, $\bar{f}_1^2(x, y)$ como $x - y$, y $\bar{A}_2^2$ como $x < y$. Para la interpretación I, proponga una valuación que satisfaga y otra que no satisfaga la fbc: $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow A_2^2(a_1, f_1^2(x_1, x_2))$.
4. En la interpretación N, diga si la siguiente fbc cerrada es verdadera o falsa: $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1)$.
5. Pruebe que:
   (a) $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2)$, es lógicamente válida.