Definición 15 Un *término* de $\mathcal{L}$ es:

1. Una variable o una constante.
2. $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, si f_i^n es una función de aridad n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.
3. Solamente aquél que se obtiene por los puntos anteriores.

Definición 16 Una *fórmula atómica* en $\mathcal{L}$ es cualquier predicado de aridad j aplicado a j términos de $\mathcal{L}$: $A_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j)$.

Definición 17 Una *fórmula bien construida* (fbc) de $\mathcal{L}$ se define como:

1. Cualquier fórmula atómica.
2. $\sim \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $(\forall x_i)\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbc de $\mathcal{L}$ y x_i es una variable.
3. Sólo de la manera que indican los incisos anteriores.

Observación 8 De acuerdo a lo conocido para los conectivos, las fbcs $(\exists x_i)\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ se tomarán como abreviación de $\sim ((\forall x_i)(\sim \mathcal{A}))$, $\sim (\mathcal{A} \to (\sim \mathcal{B}))$ y $(\sim \mathcal{A}) \to \mathcal{B}$, respectivamente.

Definición 18 Dada una fbc $(\forall x_i)\mathcal{A}$, decimos que la fbc $\mathcal{A}$ es el *alcance* del cuantificador $(\forall x_i)$.

Observación 9 Con la definición anterior, puede precisarse lo que antes se había reconocido:

1. Una variable x_i ocurre *ligada* en una fbc si está dentro del alcance de un cuantificador $(\forall x_i)$ de la fbc, o si es la misma x_i de $(\forall x_i)$.
2. Si la ocurrencia de una variable x_i no es ligada, entonces es *libre*.
3. En $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$, el alcance de $(\forall x_1)$ es $A_1^1(x_2)$, x_1 ocurre ligada y x_2 ocurre libre.

Ejercicio 24 Determine para las siguientes fbcs el alcance de cada cuantificador y el tipo de ocurrencia de cada variable:

1. $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_2))$
2. $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$

Observación 10 Según lo que se ha definido:

1. En $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ el cuantificador es redundante, al igual que sería $(\forall x_3)A_1^1(x_2)$, etc.
2. La expresión $(\forall x_2)A_1^1(x_2)$ es muy diferente a las antes aludidas, i.e: "para cualquier objeto x_2 se cumple A_1^1 para ese objeto".
3. Si en $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ reemplazamos la variable x_2 por x_3 seguimos teniendo la misma "interpretación" que en la fbc original; puesto que no obtenemos un caso en esencia diferente (la variable del cuantificador es diferente a la del predicado). Se dice que x_3 es libre para x_2 en $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ no así x_1, pues hay una interacción de las variables del término con el cuantificador, x_2 sí es libre para x_1 en $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$. Un término es libre para una variable en una fbc si puede substituir a cada ocurrencia de la variable sin afectar su "interpretación".

Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 19 Sea $\mathcal{A}$ una fbc de $\mathcal{L}$. Un término t es *libre para x_i en $\mathcal{A}$* si x_i no ocurre libre en $\mathcal{A}$ dentro del alcance de un cuantificador universal de una variable x_j que ocurre en t.

Observación 11 En la fbc $(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_3)A_2^2(x_3, x_1)$ el término x_2 es libre para x_1, pues si bien hay una ocurrencia libre de la variable x_1, ésta no se encuentra en el alcance de un cuantificador de una variable que ocurra en el término (x_2). No así sucede para el término x_3, pues efectivamente hay una ocurrencia libre de x_1 en el alcance del cuantificador de la variable x_3. Han de cumplirse, como vimos, las dos condiciones para negar la libertad de un término respecto de una variable en una fórmula: que la variable tenga una ocurrencia libre y, además, que esté en el alcance de un cuantificador de una variable que ocurre en el término.

Ejercicio 25 Diga cuáles de las ocurrencias de x_1 son ligadas y cuáles son libres en las fbcs siguientes:

1. $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1))$
2. $(A_1^1(x_3) \to (\sim (\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^3(x_1, x_2, a_1))))$
3. $((\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$
4. $(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to (\forall x_1)A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2)))$

¿En qué casos $f_1^2(x_1, x_3)$ es libre para x_2 en las fbcs?

Ejercicio 26 Demuestre la siguiente proposición:
Sea $\mathcal{A}(x_i)$ una fbc en la que x_i ocurre libre y sea x_j una variable que no ocurre libre en $\mathcal{A}(x_i)$. Si x_j es libre para x_i en $\mathcal{A}(x_i)$, entonces x_i es libre para x_j en $\mathcal{A}(x_j)$, donde $\mathcal{A}(x_j)$ es el resultado de substituir cada ocurrencia de x_i por x_j en $\mathcal{A}(x_i)$.

Ejercicio 27 Considere que cada fbc siguiente es $\mathcal{A}(x_1)$, y t el término $f_1^2(x_1, x_3)$. Escriba la fbc $\mathcal{A}(t)$ y decida si t es libre para x_1 en $\mathcal{A}(t)$.

1. $((\forall x_2)A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to A_1^1(x_1))$
2. $(\forall x_2)A_1^1(f_1^1(x_2)) \to (\forall x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3)$
3. $(\forall x_1)(\forall x_3)(A_1^1(x_3) \to A_1^1(x_1))$

2.1.3 Interpretación y satisfacción

Definición 20 Una *interpretación* I de $\mathcal{L}$ es un conjunto no vacío D_I, el *dominio* de I, junto con una colección de elementos *distinguidos*, $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \ldots \in D_I$, una colección de funciones $\bar{f_i^n} : D_I^n \to D_I, (i > 0, n > 0)$, y una colección de relaciones sobre D_I, $\bar{A_i^n} \subset D_I^n, (i > 0, n > 0)$.

Ejercicio 28 Considere para la aritmética formal un lenguaje de primer orden con $a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2, f_2^2$ así como variables, conectivos, el cuantificador y delimitadores. Defina una interpretación N (i.e. quiénes son $D_N, \bar{a_i}, \bar{f_i^j}, \ldots$).

Observación 12 Para cualquier fbc podemos encontrar interpretaciones tan disímiles como imaginables. La fbc $(\forall x_1)(A_1^3(x_1, a_2, a_1) \to A_1^2(a_1, x_1))$ puede interpretarse en un dominio referente a personas y animales, tomando como constantes distinguidas, y relaciones las siguientes: a_1 "el perro", a_2 "comida", $A_1^2(x_1, x_2)$ "x_1 respeta a x_2", y $A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ "x_1 da x_2 a x_3". Pero también es posible tomar el dominio de los números enteros, con: a_1 3, a_2 2, $A_1^2(x_1, x_2)$ "$x_1 < x_2$", y $A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ "$x_1 + x_2 > x_3$".

Observación 13 Para el enunciado "Para todo $x, y \in D_N$, no es el caso que para cada $z \in D_N, x + z \neq y$", tendríamos la fbc: $(\forall x_1)(\forall x_2) \sim (\forall x_3)(\sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2))$. Excepto que para "Cada conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo" el cuantificador ocurre aplicado a subconjuntos de D_N y como se ha visto, en el cálculo de primer orden nos referiremos sólo a elementos del dominio D_N. Cuando es el caso de que el cuantificador se aplique a relaciones entre objetos del dominio tendremos un *lenguaje de segundo orden*.