2 Cálculo de predicados

En el cálculo de predicados perseguimos prácticamente los mismos fines que nos hemos planteado para las proposiciones, esto es conocer las propiedades de este sistema. También, en primer lugar, veremos el cálculo informal.

2.1 Cálculo informal de predicados

Observaremos en el cálculo informal de predicados similitudes respecto al cálculo informal de proposiciones pero, como se espera mayor expresividad, también habrá que generalizar los conceptos que se expusieron en el cálculo de proposiciones.

2.1.1 Predicados y cuantificadores

Como lo mencionamos antes de presentar el cálculo de proposiciones, éste es un caso particular del cálculo de predicados. Para representar enunciados del lenguaje natural mediante formas proposicionales, sólo consideramos afirmaciones y conexiones entre éstas, a través de los conectivos ya vistos ($\vee$, $\sim$, etc.). Sin embargo, el hecho de que en el lenguaje natural se distingan dos entidades, sujeto y predicado, hace necesario que estas entidades también queden representadas en las expresiones de nuestro sistema.
Así, en expresiones como "Todo hombre es mortal", el sujeto es "hombre" y el predicado "es mortal", aclarando que "hombre" refiere a cualquier individuo de un conjunto (el conjunto de los hombres), de tal forma que la expresión se refiere a: $hombre(x) \to mortal(x)$.
Estamos hablando, entonces, de un universo que habrá de contener los objetos a los cuales hacemos referencia, pero también en este ejemplo tenemos que el modificador "todo" ha de representarse en la fórmula. Justamente a él corresponde el *cuantificador universal* $\forall$. Nuestro ejemplo quedaría:

$$(\forall x)(hombre(x) \to mortal(x)). \tag{1}$$

Conviene señalar, en este momento, que una expresión diferente a la anterior sería: $(\forall x)hombre(x) \to mortal(x)$, esto es, el cuantificador se puede referir a ciertas partes de la fórmula, y las variables que ocurran afectadas por un cuantificador se les llamará *ligadas* (y a las no afectadas se les llama *libres*). Así, la ocurrencia de x en el predicado *hombre* de la última fórmula es ligada, y la ocurrencia de x en el segundo predicado es libre.
Además en el lenguaje natural existe una gradación en cuanto a las afirmaciones que se hacen. En la oración "Algunas aves no vuelan" tenemos, también, un cuantificador "algunas" que claramente no es el mismo al universal, y que lo llamaremos *cuantificador existencial*. Esta oración se representa por:

$$(\exists x)(ave(x) \wedge \sim vuela(x)). \tag{2}$$

Ejercicio 21 Exprese en términos de cuantificadores, predicados, constantes, variables y conectivos las siguientes oraciones:

1. "Ningún ave vuela".
2. "Los estudiantes hicieron su trabajo".
3. "Hay un número que multiplicado por x resulta y".
4. "Esta oración es falsa".
5. "La ballena es mamífero".
6. "No es posible encontrar un real que su cuadrado sea -1".

Observemos que expresiones como "No todo hombre es mortal" que sería representada anteponiendo el conectivo $\sim$ a la fórmula 1 tienen, también, una representación en términos del cuantificador existencial. En primer lugar, es claro que el conectivo $\sim$ afecta al cuantificador $\forall$, transformándolo en $\exists$. Además, tenemos interrelación entre los conectivos; sabemos que: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ equivale a $\sim \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Lo anterior conduce a representar la oración inicial del párrafo como:

$$(\exists x)(hombre(x) \wedge \sim mortal(x)).$$

Algo semejante ocurre con la negación de la fórmula 2:

$$(\forall x)(ave(x) \to vuela(x))$$

Ejercicio 22 Exprese en términos de cuantificadores, predicados, variables y conectivos, las siguientes oraciones. Primero, empleando solamente el cuantificador universal y, luego, solamente empleando el cuantificador existencial:

1. "No toda función tiene derivada".
2. "Hay una función que es continua pero no derivable".
3. "Cada número es impar o par".
4. "No se tiene una fnd para las contradicciones".

Es importante subrayar que la cunatificación que estamos empleando se limita a objetos para los cuales no se considera mayor descomposición. En términos de sistemas matemáticos hablaríamos, por ejemplo, de números.
También, en este lenguaje de representación podremos hacer referencia a funciones, sin necesariamente acudir a la equivalencia entre funciones y relaciones. Por ejemplo, si decimos que "el producto de a por b es c", puede representarse por:

$$\mathrm{Prod}(a, b, c) \tag{3}$$

$$\mathrm{Prod}(a, b, x) \wedge \mathrm{Iguales}(x, c) \tag{4}$$

$$\mathrm{Iguales}(\mathrm{prod}(a, b), c) \tag{5}$$

donde Iguales es el predicado que proviene de la relación de igualdad, Prod es el predicado que establece la relación producto y prod la función producto.

Ejercicio 23 Represente de varias maneras los siguientes enunciados:

1. Toda matriz singular tiene su discriminante igual a cero.
2. Para una relación de equivalencia se satisface que cualquier pareja relacionada la simétrica también lo es.
3. El abuelo de una persona es aquel que es padre del padre de la presona.

2.1.2 Elementos del lenguaje $\mathcal{L}$

Como es de esperarse el alfabeto de $\mathcal{L}$ aumentará al de L el símbolo cuantificador, pero además son necesarios otros elementos. Agrupamos en las siguientes clases los símbolos de $\mathcal{L}$:

Variables: $x_1, x_2, \ldots$

Constantes: $a_1, a_2, \ldots$

Predicados: $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_1^2, A_2^2, \ldots$

Funciones: $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_1^2, f_2^2, \ldots$

Delimitadores: ",", "(" y ")"

Conectivos: $\sim$ y $\to$

Cuantificador: $\forall$

En esta lista el superíndice representa la aridad del predicado o función, y el subíndice su identificación. Recordemos que los símbolos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\ldots$, se emplean para representar fórmulas y no forman parte del lenguaje. Además haremos énfasis en el uso de una variable x_i por una fórmula $\mathcal{A}$, como $\mathcal{A}(x_i)$.
También, como lo hemos hecho antes, $\mathcal{L}$ es una abstracción de diferentes expresiones de sistemas de primer orden, en los cuales cada uno de los símbolos del lenguaje toma forma, aunque no necesariamente todos; ni las constantes, ni los predicados, ni las funciones tendrán que ocurrir.
Puede establecerse, por ejemplo, dentro de un sistema concerniente a la aritmética de números naturales que: a_1 representa a 0, A_1^2 a $=$, f_1^1 a la función sucesor, f_1^2 a la operación $+$, y f_2^2 al operador $\times$. Luego, $x_1 + x_2 = x_1 \times x_2$ ha de escribirse como: $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$.