1. $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \underset{L}{\vdash} \mathcal{C}$.
2. $\{\sim\sim \mathcal{A}\} \underset{L}{\vdash} \mathcal{A}$.
3. $\{\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \underset{L}{\vdash} \mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$.

Proposición 9 (Teorema de la Deducción) Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y un conjunto (posiblemente vacío) de fbcs Γ de L, si $\Gamma \cup \mathcal{A} \underset{L}{\vdash} \mathcal{B}$ entonces $\Gamma \underset{L}{\vdash} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.

Corolario 4 (Silogismo Hipotético) Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de L, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \underset{L}{\vdash} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$.

Proposición 10 Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de L, se tienen los teoremas:

1. $(\sim \mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$,
2. $((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A})$.

Proposición 11 Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y un conjunto (posiblemente vacío) de fbcs Γ de L, si $\Gamma \underset{L}{\vdash} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ entonces $\Gamma \cup \mathcal{A} \underset{L}{\vdash} \mathcal{B}$.

Ejercicio 15 Demuestre que los siguientes son teoremas de L:

1. $\mathcal{A} \to \sim\sim \mathcal{A}$.
2. $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\sim \mathcal{B} \to \sim \mathcal{A})$.
3. $(\sim (\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$.

1.2.2 Propiedades de L.

Definición 9 Una *valuación* de L es una función v cuyo dominio es el conjunto de las fbcs de L y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$, tal que para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de L:

1. $v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$,
2. $v(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = F$ sii $v(\mathcal{A}) = V$ y $v(\mathcal{B}) = F$.

Definición 10 Una fbc $\mathcal{A}$ de L es una *tautología* si para toda valuación v, $v(\mathcal{A}) = V$.

Observación 4 Es fácil aclarar la afirmación: todos los axiomas de L son tautologías.

Proposición 12 (Teorema de solidez) Todo teorema de L es una tautología.

Definición 11 Sea L' el sistema formal que se obtiene por la modificación del conjunto de axiomas de L. L' es una *extensión* de L sii todos los teoremas de L continuan siendo teoremas de L'.

Ejercicio 16 Sea L' el sistema formal que se obtiene a partir de L reemplazando el esquema de axioma **L3** por

L3' $((\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B}) \to ((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}))$.

Demuestre que:

1. Para cualesquier fórmulas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:
   (a) $\underset{L}{\vdash} ((\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B}) \to ((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}))$
   (b) $\underset{L'}{\vdash} ((\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$
2. Toda fbc $\mathcal{A}$ es teorema de L sii $\mathcal{A}$ es un teorema de L'.

Ejercicio 17 Sea $\mathcal{A}$ una fbc de L, y L^+ la extensión de L que añade a sus axiomas $\mathcal{A}$. Pruebe que el conjunto de teoremas de L^+ es diferente del de L sii $\mathcal{A}$ no es un teorema de L.

Observación 5 Hay que resaltar que:

1. La relación de extensión se considera reflexiva.
2. Es posible tener una extensión de L sin axiomas en común.
3. Al construir extensiones de L puede suceder que encontremos situaciones indeseables como que $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ sean teoremas de una extensión.

Definición 12 Una extensión de L es *consistente* si para ninguna fbc $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ son teoremas de la extensión.

Ejercicio 18 Sea $\mathcal{A}$ la fbc $((\sim p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_2))$.

1. Pruebe que la extensión de L que incluye a $\mathcal{A}$ como nuevo axioma tiene un conjunto de teoremas mayor que el de L.
2. Diga si la extensión de L descrita anteriormente es consistente o no.

Proposición 13 L es consistente.

Proposición 14 Una extensión L^* de L es consistente sii hay una fbc que no es teorema de L^*.

Observación 6 La proposición anterior nos dice claramente que:

1. Si toda fbc es teorema de una extensión entonces dicha extensión es inconsistente.
2. Es suficiente mostrar una fbc que no sea teorema de una extensión para concluir que tal extensión es consistente.

Ejercicio 19 Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una contradicción entonces $\mathcal{A}$ no puede ser teorema de ninguna extensión consistente de L.

Proposición 15 Sea L^* una extensión consistente de L y $\mathcal{A}$ una fbc que no es teorema de L^*. Entonces la extensión de L que se obtiene por aumentar a L^* el axioma $\sim \mathcal{A}$ es también consistente.

Definición 13 Una extensión L'' de L es *completa* si para toda fbc $\mathcal{A}$ se tiene $\underset{L''}{\vdash} \mathcal{A}$ o bien $\underset{L''}{\vdash} \sim \mathcal{A}$.

Observación 7 El término "completo" que califica las extensiones se ha empleado en cada contexto con diversos sentidos. Aquí lo hemos definido de una forma. Resulta importante notar que en nuestro contexto:

1. L difícilmente sería completo. Puesto que toda variable proposicional p es una fbc, y ni p ni $\sim p$ son teoremas.
2. Cualquier extensión inconsistente de L es completa.

Ejercicio 20 Pruebe que si L^c es una extensión consistente y completa de L, entonces cualquier extensión de L cuyos teoremas contengan propiamente a los teoremas de L^c es inconsistente.

Proposición 16 Sea L^* una extensión consistente de L, entonces existe una extensión consistente y completa de L^*.

Proposición 17 Si L^* es una extensión consistente de L, entonces existe una valuación v en la cual todo teorema de L^* toma el valor V.

Proposición 18 (Teorema de adecuación) Si una fbc $\mathcal{A}$ es una tautología, entonces $\underset{L}{\vdash} \mathcal{A}$.

Definición 14 Un sistema M es *decidible* si existe un procedimiento efectivo (algoritmo) para decidir si dada cualquier fbc es un teorema de M.

Proposición 19 L es decidible.