1.2 Cálculo formal de proposiciones

El cálculo informal de proposiciones está motivado por la abstracción de algunos elementos que participan en una deducción del lenguaje natural. Además de las formas argumentativas, en este cálculo, hemos concebido necesarios otros aspectos como la sustitución.

Con el cálculo formal pretendemos dos fines: a) construir un sistema que, independientemente de los valores de certeza que pudieran recibir las variables, permita la identificación de las expresiones que son deducibles, y b) complementando lo anterior, identificar las condiciones para que este sistema se corresponda con el del cálculo informal, es decir, que una fórmula sea demostrable cuando sea una tautología y viceversa. De cumplirse estas propiedades, en un sistema formal, podríamos afirmar que hemos construido un sistema o teoría fiel al tipo de deducciones que esperamos realizar.

Sin reducir la expresividad del lenguaje simplificaremos el alfabeto, considerando solamente como conectivos a $\sim$ y a $\to$.

1.2.1 El sistema formal L.

Definición 6 El *sistema formal* L del *cálculo proposicional* está definido por lo siguiente:

1. *Alfabeto de símbolos (infinito).* $\sim, \to, (,), p_1, p_2, \ldots$.
2. *Conjunto de fórmulas bien contruidas (fbc).* Una fbc es:
   (a) Una p_i para toda $i \geq 1$.
   (b) $(\sim \mathcal{A})$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ lo son.
   (c) Únicamente las generadas por los incisos anteriores.
3. *Axiomas.* Hay un número infinito de axiomas, los cuales se generan por los siguientes *esquemas de axioma*. Cada esquema considera cualesquier fbc $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$:
   L1 $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.
   L2 $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$.
   L3 $(((\sim \mathcal{A}) \to (\sim \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.
4. *Reglas de deducción.* En L hay sólo una regla de deducción llamada *modus ponens* (*MP*), que establece: $\mathcal{B}$ es una *consecuencia directa* a partir de $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, para cualesquier formas proposicionales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Definición 7 Una *demostración* en L es una secuencia de fbc's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ tal que para cada i $(1 \leq i \leq n)$, o bien $\mathcal{A}_i$ es un axioma de L o $\mathcal{A}_i$ es una consecuencia de dos miembros previos de la secuencia, $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{A}_k$, $(1 \leq j, k < i)$. Así la secuencia se llama demostración de $\mathcal{A}_n$, y a $\mathcal{A}_n$ un *teorema* de L, denotado por $\underset{L}{\vdash} \mathcal{A}_n$.

Observación 2

a) Veamos que las siguientes fbcs son teoremas:

$$p_1 \to (p_1 \to p_1)$$
$$\sim \mathcal{A} \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \sim \mathcal{A})$$
$$(p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1)))$$
$$(\sim (p_3 \to p_4) \to \sim p_5) \to (p_5 \to (p_3 \to p_4))$$

Y muchas más construidas con este criterio. La secuencia de su demostración es de longitud uno.

b) Además, según la definición anterior, la fbc $p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1))$ es un teorema, ya que:

1	$(p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1)))$	**L1**
2	$p_1 \to (p_1 \to p_1)$	**L1**
3	$p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1))$	MP 1,2

c) Así, una estrategia para demostrar que una fbc es un teorema es aplicar repetidamente uno de los siguientes pasos:

h.1 Verificar si la fbc es instancia de algún axioma (o teorema), o bien,

h.2 (a) Considerar la fbc como consecuente de algún axioma o teorema ($\mathcal{B}$ en $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$).
(b) Tratar de demostrar que el antecedente ($\mathcal{A}$) también es teorema.
(c) Conseguido lo anterior, por modus ponens concluimos la fbc deseada ($\mathcal{B}$).

d) Por ejemplo la fbc $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$ no es instancia de algún axioma o teorema conocido. Por tanto, aplicamos la heurística 2. Consideramos, entonces, que es el consecuente de algún axioma. En este caso debemos "encontrar parecido" entre la fbc y el consecuente de un axioma (a). Por inspección, **L1** y **L3** quedan excluidos, y debe usarse **L2**. Así $\mathcal{A}$ es p_1, $\mathcal{B}$ es p_2, y $\mathcal{C}$ es p_1. Tenemos ahora, como dice (b), que demostrar que $p_1 \to (p_2 \to p_1)$ es un teorema. Usando h.1 vemos que ésta es una instancia de **L1**. Resumiendo:

1	$(p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	**L2**
2	$p_1 \to (p_2 \to p_1)$	**L1**
3	$(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$	MP 1,2

Ejercicio 13 Demuestre que:

1. $\underset{L}{\vdash} (p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$.
2. $\underset{L}{\vdash} (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$.
3. $\underset{L}{\vdash} (p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$.
4. $\underset{L}{\vdash} (\sim \mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.

Definición 8 Sea Γ cualquier conjunto de fbc de L. Una secuencia de fbc's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ es una *deducción a partir de* Γ si para cada i $(1 \leq i \leq n)$ se cumple:

1. $\mathcal{A}_i$ es un axioma de L.
2. $\mathcal{A}_i$ es un miembro de Γ.
3. $\mathcal{A}_i$ es una consecuencia directa a partir de miembros anteriores de la secuencia.

Así, $\mathcal{A}_n$ se dice *deducible a partir* de Γ, lo cual se expresa como $\Gamma \underset{L}{\vdash} \mathcal{A}_n$.

Observación 3

a) Notemos que para realizar deducciones aplicamos la misma idea que en las demostraciones, agregando la posibilidad de usar alguna premisa (Γ) en los pasos h.1, h.2(a) y h.2(b) de la anterior observación.

b) Por ejemplo, para ver que $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))\} \underset{L}{\vdash} (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, elegimos a $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ como consecuente del consecuente de **L2**, con $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$. Tendremos que demostrar, por tanto, el antecedente de **L2**: $\mathcal{B} \to (\square \to \mathcal{C})$, y el antecedente del consecuente de **L2**: $\mathcal{B} \to \square$, donde el rectángulo representa una fbc desconocida pero que debemos definir. Para lograr el primer objetivo, revisamos nuestras premisas, y observamos que, justamente, con $\mathcal{A}$ podemos llenar el "hueco" en ambas fbcs. De esta forma determinamos un elemento de la secuencia de la demostración. Hemos de hacer algo semejante con el antecedente del consecuente de **L2**. Tenemos, entonces la siguiente demostración:

1	$(\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$	**L2**
2	$\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$	premisa 2
3	$(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$	MP 1,2
4	$\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$	**L1**
5	$\mathcal{A}$	premisa 1
6	$\mathcal{B} \to \mathcal{A}$	MP 4,5
7	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	MP 3,6

Ejercicio 14 Demuestre que: