Proposición 2 Sea $\mathcal{A}$ una forma proposicional en la cual ocurren las variables proposicionales $p_1, p_2, \ldots, p_n$, y sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ cualesquier formas proposicionales. Si $\mathcal{A}$ es una tautología, entonces la forma proposicional $\mathcal{B}$, que se obtiene de reemplazar cada ocurrencia de p_i por $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ en $\mathcal{A}$, es también una tautología.

Ejercicio 4 Demuestre que $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{A})$ y $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$ son tautologías.

Ejercicio 5 Demuestre que para cualesquier formas proposicionales $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, los siguientes pares son lógicamente equivalentes:

1. $(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$ y $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$.
2. $(\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ y $((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C})$.
3. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$.
4. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$.
5. $\mathcal{A}$ y $(\sim (\sim \mathcal{A}))$.

Lo anterior permite simplificar la escritura, por ejemplo: usar $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ en lugar de $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$, lo cual será justificado más adelante.

Proposición 3 Para cualesquier formas proposicionales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, la forma proposicional $(\sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim \mathcal{A}) \vee (\sim \mathcal{B}))$, y la forma proposicional $(\sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim \mathcal{A}) \wedge (\sim \mathcal{B}))$.

Proposición 4 Si $\mathcal{B}_1$ es la forma proposicional que resulta por el reemplazamiento de las ocurrencias de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ en la forma proposicional $\mathcal{A}_1$, y $\mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}_1$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{A}_1$.

Ejercicio 6 Demuestre que $((\sim ((\sim p) \vee q)) \vee r)$ es lógicamente equivalente a $((p \to q) \to r)$.

1.1.1 Formas normales

Definición 4 Una forma proposicional *restringida* es aquella en la que sólo se emplean los conectivos $\sim$, $\wedge$ y $\vee$.

Proposición 5 Sea $\mathcal{A}$ una forma proposicional restringida y $\mathcal{A}^*$ el resultado de intercambiar los conectivos $\wedge$ por $\vee$ y reemplazando cada variable proposicional por su negación en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim \mathcal{A})$.

Corolario 1 Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son variables proposicionales, entonces $\bigvee_{i=1}^{n}(\sim p_i) = ((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee \ldots \vee (\sim p_n))$ es lógicamente equivalente a $\sim (\bigwedge_{i=1}^{n} p_i) = (\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n))$.

Proposición 6 Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ cualesquier formas proposicionales. Entonces:

1. $\bigvee_{i=1}^{n}(\sim \mathcal{A}_i)$ es lógicamente equivalente a $\sim (\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$.
2. $\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim \mathcal{A}_i)$ es lógicamente equivalente a $\sim (\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$.

Ejercicio 7 Demuestre que $((\sim (p \vee (\sim q))) \to (q \to r))$ es lógicamente equivalente a $((\sim (q \to p)) \to ((\sim q) \vee r))$.

Proposición 7 Toda función definida por una tabla de certeza está determinada por una forma proposicional restringida.

Ejercicio 8 Determine la forma proposicional restringida asociada a la función dada por la tabla:

V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Corolario 2 Toda forma proposicional que no es una contradicción es lógicamente equivalente a una forma proposicional restringida de la forma $(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} P_{ij}))$, donde cada P_{ij} es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Dicha forma es llamada la *forma normal disyuntiva*.

Corolario 3 Toda forma proposicional que no es una tautología es lógicamente equivalente a una forma proposicional restringida de la forma $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n} P_{ij}))$, donde cada P_{ij} es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Dicha forma es llamada la *forma normal conjuntiva*.

Ejercicio 9 Encuentre las formas normales de cada una de las siguientes formas proposicionales:

1. $(p \leftrightarrow q)$.
2. $(((p \to q) \to r) \to s)$.

1.1.2 Argumentación y validez

Definición 5 La *forma argumentativa* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n;\ \therefore\ \mathcal{A}$ es *inválida* si es posible asignar valores de certeza a todas las variables proposicionales que ocurran, de tal forma que las formas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ tomen valor V y $\mathcal{A}$ tome valor F. En caso contrario la forma argumentativa es *válida*.

Ejercicio 10 Determine la validez o invalidez de las siguientes formas argumentativas:

1. $p \to q, q \to r, p;\ \therefore r$.
2. $p \to (q \to r), p;\ \therefore r$.

Observación 1 El procedimiento empleado para determinar la validez o invalidez de una forma argumentativa, a partir de la definición, puede ser simplificado buscando una asignación de valores a las variables para obtener en la "conclusión" un valor de certeza particular. Por ejemplo, si tenemos: $((\sim p_1) \vee p_2), (p_1 \to (p_3 \wedge p_4)), (p_4 \to p_2);\ \therefore (p_2 \vee p_3)$, tratamos de conseguir el valor F en $(p_2 \vee p_3)$: ambas variables tendrán que tomar el valor F. Además, para que sea inválida la forma argumentativa:

1. en $((\sim p_1) \vee p_2)$, p_1 deberá tomar el valor F,
2. a p_4 tendrá que asignarse F, para que $(p_4 \to p_2)$ sea V, y
3. con el asignamiento que llevamos $(p_1 \to (p_3 \wedge p_4))$, toma el valor V.

Tenemos, pues, un asignamiento de valores que hace tomar a toda la lista de "argumentos" el valor V y a la "conclusión" el valor F, así la forma argumentativa es inválida.

Proposición 8 La forma argumentativa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n; \therefore \mathcal{A}$ es válida sii la forma proposicional $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ es una tautología.

Ejercicio 11 Para cada argumentación, escriba la correspondiente forma argumentativa y determine si es inválida o válida:

1. Si la función f no es continua entonces la función g no es diferenciable, g es diferenciable. Por tanto, f es continua.
2. Si U es un subespacio de V entonces U es un subconjunto de V, U contiene el vector cero y U es cerrado. U es un subconjunto de V, y si U es cerrado entonces U contiene el vector cero. Por tanto, si U es cerrado entonces U es un subespacio de V.

Ejercicio 12 Suponga que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n; \therefore \mathcal{A}$ es una forma argumentativa válida. Demuestre que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}; \therefore (\mathcal{A}_n \to \mathcal{A})$ también lo es.