Lógica matemática

Héctor Jiménez Salazar
hjimenez@fcfm.buap.mx

aagosto 17, 2001

La lógica es una abstracción de la esencia de los *sistemas*. Tres hechos notables ponen en relevancia el papel que juega la lógica en la computación. Mencionemos cada uno de ellos.
La matemática fertilizó el campo de la necesidad de eliminar la monotonía, acelarar la realización y simplificar los cálculos, proporcionando las bases para la construcción de la computadora, un sistema más, concreto. Tal vez sin sorpresa, al considerar que el primer sistema que, como tal, conoció la humanidad fue la geometría euclideana (el cimiento más importante de las matemáticas), se dieron las bases para converger en los sistemas palpables del siglo XX.
La noción de *máquina universal* se refleja en la construcción cotidiana, y ahora con tendencia explosiva, de sistemas de cómputo. Esta universalidad dice mucho (y además, se cuestiona) acerca de cuan general es la esencia en que se apoya. Por ahora presenciamos que, cada vez, el mundo cambia más rápido por la influencia de los sistemas computacionales.
El poder unificador que expresó la *programación lógica* en el proyecto de construcción de una nueva generación de computadoras, en la década del ochenta, marcó en definitiva la necesidad de los *sistemas deductivos* como paradigma computacional (útil para el estudio), hecho sustentado por la versatilidad de la lógica para expresar numerosas problemáticas como las de las Bases de Datos, de los Sistemas Distribuidos, de la Ingeniería de Software, y de prácticamente todos los campos de la Inteligencia Artificial.
Nos parece importante, pues, conocer la Lógica Matemática. Estudiaremos la lógica clásica, cálculo de primer orden o cálculo de predicados, para después revisar algunos elementos de la programación lógica, que establecen las bases de los lenguajes como PROLOG.
Empezaremos por un caso particular del cálculo de predicados que es el cálculo proposicional.

1 Cálculo proposicional

La lógica matemática se funda en las deducciones que observamos en el lenguaje ordinario, vía un proceso de abstracción. En un primer acercamiento observamos afirmaciones de un predicado sobre un sujeto y, además, conectivos entre estas afirmaciones ("si-entonces", "no", "o", "y" etc.). Las deducciones se realizan argumentando.
Por ejemplo:
Si Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal.
Sócrates es un hombre.
$\therefore$ Sócrates es mortal.
Aunque en lógica se estudia la forma abstracta de la anterior argumentación, es decir:
$A \to B$
A
$\therefore\ B$
El cálculo de proposiciones, es un caso particular de la lógica de primer orden. Del cual estudiaremos, en primer lugar, propiedades que subyacen a la interpretación de las expresiones (semántica). Veremos que estas propiedades se mantienen, además, observando la forma de las expresiones bien construidas (sintaxis). Así, concluiremos las propiedades de este cálculo: solidez, adecuación y decidibilidad, las cuales, a grandes rasgos, establecen que es equivalente trabajar con formas o con interpretaciones (solidez-adecuación), y que es posible demostrar una fórmula mecánicamente (decidibilidad).

1.1 Cálculo informal de proposiciones

El establecer como dado, aceptar, asertar o afirmar algo como parte de una argumentación será visto como una expresión con *valor de certeza verdadero* o V, y se distinguirá de lo contrario con el valor de certeza *falso*, F. Usamos el principio de composicionalidad, esto es, la veracidad de una argumentación o su validez se precisa de acuerdo a la combinación de los valores de certeza de cada componente de ella. Suponemos, pues, las *tablas de certeza* de los conectivos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\leftrightarrow$. Hemos entonces de considerar, para empezar a formalizar este lenguaje, variables que nos permitan representar proposiciones como las anteriormente ejemplificadas, éstas se representarán con las letras $p, q, r, \ldots$. A su vez, las letras $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, representan expresiones.

Definición 1 Una *forma proposicional* es una expresión que involucra variables y conectivos. Son formas proposicionales:

1. Cualquier variable proposicional.
2. $(\sim \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, y $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ lo son.
3. Solamente las especificadas anteriormente.

Ejercicio 1

1. De acuerdo a la composicionalidad, obtener la tabla de certeza de la forma proposicional $((p \vee q) \to r)$.
2. La tabla de certeza para n variables proposicionales puede verse como una función que asigna un valor de certeza a cada n-tupla. ¿Cuántas *funciones de certeza* existen para n variables proposicionales?

Definición 2 Una forma proposicional es una *tautología* si toma el valor V bajo cualquier asignación de valores a sus variables proposicionales que la componen. Una forma proposicional es una *contradicción* si toma el valor F bajo cualquier asignación de valores a sus variables proposicionales que la componen.

Ejercicio 2 Comprobar si las siguientes formas proposicionales son tautologías o contradicciones:

1. $(p \to p)$.
2. $(p \wedge (\sim p))$.
3. $(p \to (q \vee r))$.
4. $(p \to (q \to p))$.
5. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$.
6. $(((\sim p) \to (\sim q)) \to (q \to p))$.

Definición 3 Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas proposicionales,

1. $\mathcal{A}$ *implica lógicamente* $\mathcal{B}$ si $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es una tautología.
2. $\mathcal{A}$ es *lógicamente equivalente* a $\mathcal{B}$ si $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una tautología, esto es si $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ son tautologías.

Ejercicio 3 Comprobar si las siguientes parejas son lógicamente equivalentes:

1. $(\sim p \vee q)$ y $(p \to p)$.
2. $(p \wedge q)$ y p.
3. $(p \to q)$ y $((\sim q) \to (\sim p))$.
4. $((p \vee q) \wedge r)$ y $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
5. $(((\sim p) \vee q) \to r)$ y $((p \wedge (\sim q)) \vee r)$.

Proposición 1 Si $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ son tautologías, entonces $\mathcal{B}$ es una tautología.